ENSEÑANZA

C+1 CASIO Académico VENEZUELA

UN EJEMPLO DE APLICACIÓN DE LOS RECURSOS DE LA CALCULADORA CASIO CALSSWIZ FX-570EX PARA LA RESOLUCIÓN DE INECUACIONES

Prof. Andrés Pérez

OBJETIVO(S):

Resolver inecuaciones de diversas complejidades, usando los recursos de la calculadora CASIO CLASSWIZ *fx-570EX*. Usar el módulo de inecuaciones de la calculadora CASIO CLASSWIZ *fx-570EX* (`B:Inequality`) como una herramienta práctica en la resolución de inecuaciones. Usar de forma complementaria el código `QR` de la calculadora CASIO CLASSWIZ *fx-570EX,* y el módulo de cálculo (`1:Calculate`) para determinar intervalos de solución de inecuaciones.

RESUMEN:

Una *inecuación*, es una desigualdad entre dos expresiones algebraicas. Desde el punto de vista de la solución buscada, la diferencia fundamental es que una inecuación tiene una solución conjuntista que a diferencia de las ecuaciones polinómicas, son soluciones con un número infinito de posibilidades, es decir, como estamos resolviendo inecuaciones sobre la recta real, las soluciones son intervalos, o uniones de intervalos o en su defecto el conjunto vacío. Ahora bien, la calculadora CASIO CLASSWIZ *fx-570EX*, dispone de un módulo capaz de resolver este tipo de planteamientos (módulo `B:Inequality`), pero sólo en los casos polinómicos y de grados entre 2 y 4, además de resolver inecuaciones de este tipo de manera simultánea, es decir, sistemas de inecuaciones. Ahora bien, si consideramos inecuaciones que involucren polinomios de grado mayor o cocientes de polinomios, entonces debemos diseñar estrategias que nos permitan obtener la solución. En consecuencia, la idea es tratar de adaptar los recursos de la calculadora CASIO CLASSWIZ *fx-570EX* para obtener la solución de cualquier inecuación y en esa búsqueda, afianzar los conocimientos matemáticos resaltando las bondades de la CLASSWIZ *fx-570EX*.

CONOCIMIENTOS PREVIOS:

El proceso puede servir para resolver casi cualquier inecuación, por ello no seremos tan específicos en un listado de conocimientos previos, más allá de una base funcional. A saber, necesitamos resolver inecuaciones de la forma:

$$\boxed{f(x) \leq g(x)}$$

Donde f y g son funciones conocidas (tomamos esta desigualdad como referencial). En consecuencia, el estudiante debe estar familiarizado con:

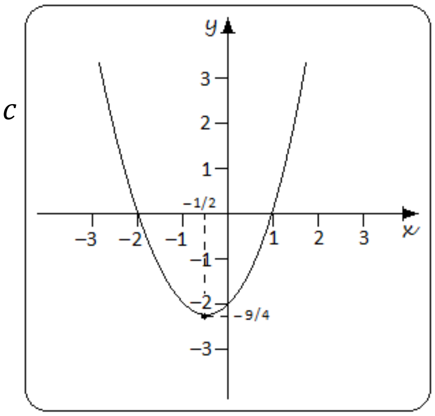
- ✓ Dominio de funciones de variable real.
- ✓ Grafica de funciones básicas de variable real.
- ✓ Puntos clave de trazado de curvas básicas.
- ✓ Altura de una curva.
- ✓ Subconjuntos de la recta (Intervalos).
- ✓ Notación conjuntista y notación algebraica de intervalos.

Observación: Puede darse el caso de que no exista la forma analítica de resolver la inecuación, en virtud de que corresponde a funciones cuya comparación de alturas se dificulta por la naturaleza de su inversa. A saber, cuando se establecen comparaciones entre Exponenciales y polinomios, Trigonométricas vs. Polinomios o inclusive Exponenciales vs. Trigonométricas, entre otras.

DESARROLLO:

Consideremos la función $f(x) = x^2 + x - 2$, la cual es una parábola cuyo coeficiente independiente es negativo y como el coeficiente del término cuadrático es positivo, podemos inferir rápidamente que tiene dos raíces reales y distintas. En efecto su gráfica está dada por:

Para graficar correctamente esta parábola, notamos ciertos elementos notables de la misma, como son:



- **Coeficientes:** $a = 1\,, b = 1\,, c = -2$
- **Corte con el eje *y*:** $P(0, -2)$. Recuerde que el valor de c refiere a la evaluación de la parábola en $x = 0$.
- **Raíces:** Para ello podemos usar la resolvente. Veamos:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = -2 \; y \; x_2 = 1$$

Podemos también observar directamente que:

$$f(x) = x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$$

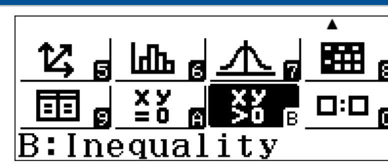
- **Eje de simetría:** $x = -\frac{1}{2(1)} = -\frac{1}{2}$
- **Vértice:** $V\left(-\frac{1}{2}, -2 - \frac{1^2}{4(1)}\right) \Rightarrow V\left(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$

Ahora bien, si quisiéramos conocer los valores de la variable x, para los cuales la función es mayor o igual a cero, es decir:

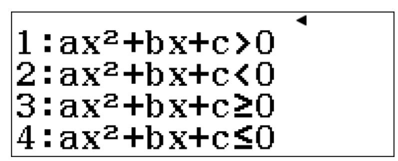
$$\boxed{f(x) \geq 0 \Longrightarrow x^2 + x - 2 \geq 0}$$

SOLUCIÓN USANDO MÓDULO `B:Inequality` DE CLASSWIZ fx-570EX

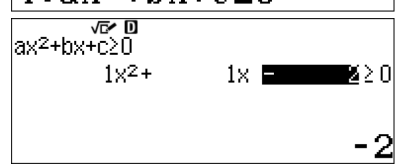
1. Presionamos la tecla [MENU] y con la tecla [▼] ubicamos el módulo de inecuaciones. También podemos pulsar [MENU] [ALPHA] [°'"]. Luego, presionamos el número [2] para determinar el grado del polinomio.



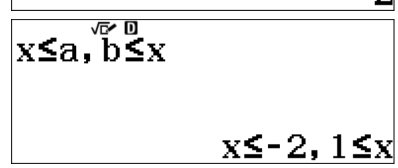
2. Seguidamente, presionamos el número [3], en virtud que este representa la desigualdad que queremos trabajar, como se muestra en la pantalla de la derecha.



3. En esta nueva pantalla introducimos los coeficientes del polinomio seguidos de la tecla [=]. A saber, pulsamos [1] [=] [1] [=] [(−)] [2] [=].



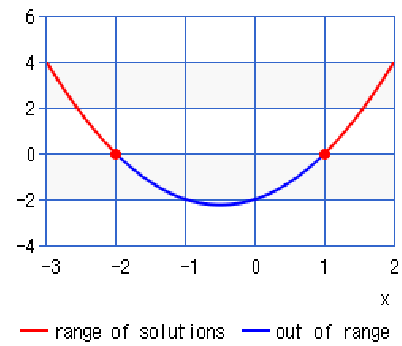
4. Para observar la solución basta con pulsar nuevamente la tecla [=].



Observación: Cuando observamos la solución que proporciona la calculadora debemos ser cuidadosos en su interpretación. En el lenguaje simbólico, la “coma” se lee como un “y”, por tanto deberíamos entender que son los valores de x menores o iguales a -2 y mayores o iguales a 1. Visto así, se podría entender que es una intersección y eso no es cierto. En efecto, basta con observar el gráfico anterior y verificamos que la solución está dada por: $(-\infty,-2] \cup [1,\infty)$. Entonces, todas estas respuestas separadas por “comas” debemos entenderlas como uniones de intervalos, más aún porque no tiene sentido la intersección de intervalos no disjuntos, ya que esto es de nuevo un intervalo y en ese caso, la calculadora debería dar la solución simplificada.

VISUALIZACIÓN GRÁFICA USANDO EL CÓDIGO QR

Si queremos visualizar la gráfica de nuestra solución, entonces después de mostrada la solución de la inecuación (última pantalla de la página anterior), en esa pantalla presionamos SHIFT OPTN (QR) y allí se desplegará el código de abajo y el mismo código en una pantalla adicional, sobre esta pequeña pantalla hacemos click y conectamos directamente a la página wes.casio.com (Worldwide Education Service), donde aparecerán la solución y la gráfica de la derecha, que con color rojo, indica la solución que acabamos de obtener.



SOLUCIÓN DE UNA INECUACIÓN QUE INVOLUCRA UN COCIENTE DE POLINOMIOS

En este caso, resolveremos una inecuación usando artificios del álgebra, pero tratando de en algún momento adecuado, de usar los recursos de inecuaciones de la CASIO *CLASSWIZ fx-570 EX,* para poder obtener la solución de una manera más eficiente. Veamos:

Resolver: $\frac{3x+1}{2x-1} \leq x+3$, es equivalente a resolver: $\frac{3x+1}{2x-1} - (x+3) \leq 0$

Y en este caso terminamos estudiando un signo y no una comparación de alturas que es más complicado. Entonces,

$$\frac{3x+1}{2x-1} - (x+3) \leq 0 \quad \underset{\text{m.c.m}}{\Longrightarrow} \quad \frac{3x+1-(x+3)(2x-1)}{2x-1} \leq 0$$

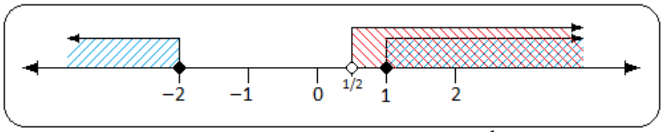
Aplicando propiedad distributiva y sumando elementos comunes, nos queda:

$$\frac{3x+1-(x+3)(2x-1)}{2x-1} \leq 0 \xrightarrow[\text{P. Distributiva}]{} \frac{-2x^2-2x+4}{2x-1} \leq 0 \xrightarrow[\text{diviendo por}-2]{} \frac{x^2+x-2}{2x-1} \geq 0$$

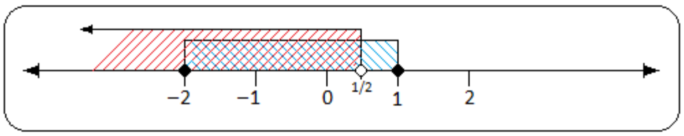
Sabemos que al presentar un cociente, se debe satisfacer la ley de los signos y por tanto, la desigualdad se cumple cuando el signo del numerador y el del denominador son iguales**.** En consecuencia, debemos evaluar:

$$x^2 + x - 2 \geq 0 \quad \text{y} \quad 2x - 1 > 0 \quad \text{o bien} \quad x^2 + x - 2 \leq 0 \quad \text{y} \quad 2x - 1 < 0$$

Para el primer caso, tenemos que: $2x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$ y por la parte anterior, la solución de la inecuación inicial está dada por: $(-\infty, -2] \cup [1, \infty)$. Entonces, la solución final de esta parte corresponde a la intersección de estos intervalos y obtenemos: $[1, \infty)$.



Para el segundo caso, tenemos que: $2x - 1 < 0 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$ y por la parte anterior, la solución de la inecuación $x^2 + x - 2 \leq 0$ está dada por: $[-2,1]$ (ver gráfica del código QR). Entonces, la solución final de esta parte corresponde a la intersección de estos intervalos y obtenemos: $\left[-2, \frac{1}{2}\right)$.



Por consiguiente, la solución final está dada por la unión de ambos intervalos: $\left[-2, \frac{1}{2}\right) \cup [1, \infty)$.

Observación: La inecuación que queremos resolver, también puede ser expresada usando factorizaciones. A saber, si consideramos las raíces del polinomio en el numerador y por ende, su forma raíz, obtenemos:

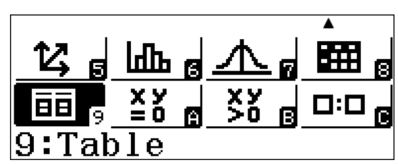
$$\boxed{\frac{(x+2)(x-1)}{2x-1} \geq 0}$$

Basta entonces con estudiar los signos de estas rectas en los distintos intervalos determinados por sus raíces. A saber, como hay tres raíces, la recta real queda dividida en cuatro intervalos, donde los valores -2 y 1 pertenecen a la solución por ser los que anulan al numerador. La raíz del denominador nunca pertenece a la solución por no estar definida la función en ese valor.

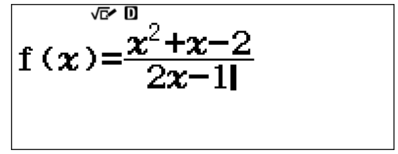
UNA FORMA DE CALCULAR LA SOLUCIÓN USANDO EL MÓDULO `9:Table`

Calcular los signos anteriores puede resultar en una equivocación; cuando el estudiante debe hacer cálculos repetidos con diversos valores introducidos en una misma expresión, esto ocurre básicamente, porque en la premura de dar una respuesta rápida y concisa, se introducen las expresiones en forma repetida o bien, con el cursor nos regresamos a la pantalla que creemos debe ser e introducimos valores distintos, o bien por evitar la devolución e introducción repetida dejamos de usar el dispositivo. Vale destacar que la calculadora CASIO CLASSWIZ *fx-570EX*, dispone de una aplicación donde podamos introducir una función y generar una escala de valores, pero en el modo `Table,` es posible proporcionar una rutina que genere estos valores de forma directa sin repetir la fórmula. Veamos:

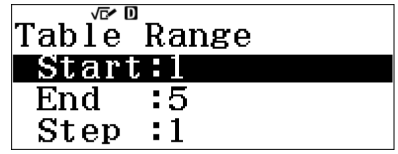
1. Presionamos [MENU] para luego presionar [9].



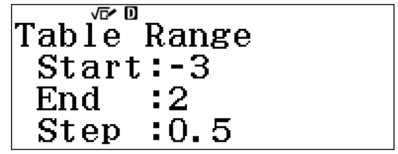
2. Una vez presionado el $\boxed{9}$, procedemos a definir la función.



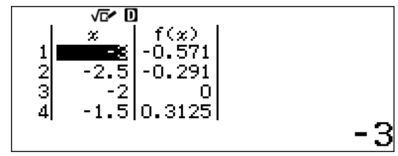
3. Pulsamos $\boxed{\equiv}$ y nos solicitará información de otra función g(x), pero podemos ignorarla pulsando nuevamente $\boxed{\equiv}$ y procedemos a definir la escala de valores de la tabla.

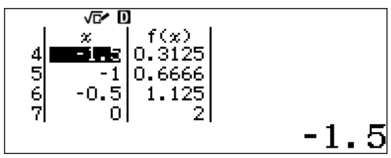


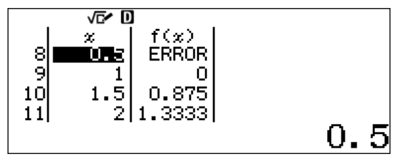
4. Podemos comenzar la tabla en -3 y la podemos finalizar en 2. Para el Step, colocamos el valor $0{,}5$, para así garantizar que tenemos evaluaciones en todas las zonas delimitadas por las raíces involucradas en la expresión.



5. Con esto al pulsar $\boxed{\equiv}$, generamos una tabla, donde podemos constatar que para valores de x anteriores a -2, la función es negativa, lo que no nos interesa. Con la tecla ▼, podemos descender para observar otros valores y entre -2 y $0{,}5$ tenemos valores positivos de la función. Finalmente, de 1 en adelante, la función es positiva.







Es importante destacar que en el valor $0{,}5$, se presenta un ERROR, que viene de evaluar la raíz del denominador. Así obtenemos por otra la vía la solución esperada.

EJERCICIOS ADICIONALES:

Como una forma de observar que los recursos son versátiles, dejamos al lector los siguientes ejercicios para usar las técnicas expuestas y así poder mejorar la experiencia en el uso de la calculadora, basándonos en la práctica y la continuidad de procesos.

- $\left|\frac{3x+1}{2x-1}\right| \leq x+3$ Sol: $\left[-2, \sqrt{5}-2\right] \cup [1, \infty)$

Para los siguientes, hallar la solución:

- $\left|\frac{3x+1}{2x-1}\right| \leq |x+3|$
- $\left|\frac{3x+1}{2x-1}\right| \leq \left|\frac{x+3}{2-x}\right|$
- $x^2 - 3x + 6 > 2 - 5x$