CÓNICAS, REGIONES EN EL PLANO Y APLICACIONES (PARTE I)

Prof. Rafael Cádiz y Prof. Andrés Pérez

OBJETIVO(S):

Analizar la ecuación general de una cónica e identificar su gráfico, a partir de los coeficientes que la componen, observando su discriminante o invariante y usando los recursos de la calculadora CASIO *fx-9860GII*. Obtener la ecuación canónica, para determinar sus elementos notables y así realizar la construcción del gráfico desde el enfoque analítico o viceversa, es decir, a partir de un gráfico dado identificar elementos notables, para luego construir las ecuaciones asociadas. Ubicar regiones del plano definidas mediante cónicas y usarlas para graficar diferentes situaciones de utilidad en la ingeniería, con la ayuda del módulo gráfico de la calculadora CASIO *fx-9860GII*.

RESUMEN:

Una *cónica*, es una curva que se obtiene como resultado de intersectar un plano con un cono de revolución, desde la visión simple geométrica. En consecuencia, dependiendo de cómo se dé la intersección de estas dos superficies, nos queda que si el plano no pasa por el vértice del cono, la sección que resulta es: una elipse, una parábola, o una hipérbola cuando intersectamos con un plano inclinado, o en el caso de la hipérbola podría darse con un plano vertical. Recordemos además, que si la elipse tiene excentricidad igual a 1, entonces obtenemos una circunferencia (intersección con un plano horizontal) como un caso particular. Ahora bien, la necesidad de representar y manipular estos datos desde el aspecto analítico, hace que debamos identificar estas curvas mediante ecuaciones, que en particular no necesariamente son funciones, sino más bien relaciones en general.

Graficar estas curvas, puede ser el resultado de un estudio completo dentro de una aplicación que entre otras cosas, represente el movimiento de alguna partícula como por ejemplo, el movimiento planetario que describe órbitas elípticas, o la representación de estructuras dentro del mundo de la ingeniería civil o inclusive de la arquitectura y que a partir de ellas, se construyen edificaciones o estructuras de considerable belleza, pero que además puedan considerarse seguras por su forma geométrica; podemos inclusive observar estructuras geométricas en la biología en células, plantas, etc. En efecto, hoy en día la modelación geométrica ha tenido avances importantes, que se reflejan en su implementación en lugares y conocimientos que en un principio resultaban ajenos a la matemática.

En ocasiones, es posible que podamos resultar confundidos ya que, algunas veces por una simple observación, podríamos inferir que las curvas presentes en ciertas construcciones, son de un determinado tipo y en realidad no lo son. Entonces, ¿cómo identificamos estos fenómenos? Por ejemplo, si consideramos una catenaria, a simple vista puede parecer una parábola. Por tanto, más allá del conocimiento necesario para poder realizar aplicaciones de calidad, resulta importante la discriminación a partir de modelos y de la eficiencia de nuestras técnicas para rápidamente descartar algunas situaciones. La calculadora CASIO *fx-9860GII*, resulta una herramienta muy útil para identificar y graficar estas funciones a partir de los coeficientes que la componen.

Todos los Derechos Reservados

CONOCIMIENTOS PREVIOS:

El proceso puede servir para identificar casi cualquier región en el plano delimitada por una cónica cuya ecuación general es de la forma:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

En consecuencia, se debe estar familiarizado con:

- ✓ Dominio, Codominio y Rango (Recorrido) de funciones de variable real.
- ✓ Identificación de puntos en el plano.
- ✓ Elementos notables de una cónica.
- ✓ Grafica de cónicas básicas.
- ✓ Proceso de completación de cuadrados.
- ✓ Inecuaciones en dos variables.
- ✓ Identificación de regiones en el plano.

DESARROLLO:

Una *cónica*, se define como el lugar geométrico de los puntos del plano de coordenadas (x, y) que satisfacen una ecuación general de la forma:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

La ecuación anterior, la podemos expresar en forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F & \frac{D}{2} & \frac{E}{2} \\ \frac{D}{2} & A & \frac{C}{2} \\ \frac{E}{2} & \frac{C}{2} & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Donde la matriz asociada M es simétrica y por tanto, representa una forma cuadrática, de allí que una cónica se defina como una curva cuadrática. Podemos notar que: cuando $C \neq 0$, la cónica tiene una rotación. Aquí consideraremos sólo los casos cuando $C = 0$, es decir, cuando las cónicas no han sido obtenidas por la combinación de traslaciones y rotaciones.

Ahora bien, claramente las cónicas desde su ecuación general quedan determinadas por sus coeficientes, entonces podemos clasificarlas a partir del comportamiento de su matriz asociada. Como sólo necesitamos hablar de cónicas, no daremos una clasificación completa sino más bien tomaremos un extracto de la misma. Para ello, consideremos el primer menor asociado:

$$M_{11} = \begin{pmatrix} A & \frac{C}{2} \\ \frac{C}{2} & B \end{pmatrix}$$

Todos los Derechos Reservados

Si $\det(M) \neq 0$, entonces estamos hablando de que la ecuación general da origen a una cónica, en caso contrario, el resultado serán rectas. Veamos:

<table>
<tr><td rowspan="3">$\det(M_{11}) \neq 0$</td><td rowspan="2">$\det(M_{11}) > 0$</td><td>$\text{signo}\left(\det(M)\right) = \text{signo}\,(m_{22} + m_{33})$ Elipse Imaginaria</td></tr>
<tr><td>$\text{signo}\left(\det(M)\right) \neq \text{signo}\,(m_{22} + m_{33})$ Elipse Real</td></tr>
<tr><td>$\det(M_{11}) < 0$</td><td>Hipérbola</td></tr>
<tr><td>$\det(M_{11}) = 0$</td><td colspan="2">Parábola</td></tr>
</table>

DETERMINACIÓN DE CÓNICAS USANDO MATRICES

Consideremos la siguiente ecuación general:

$$9x^2 + 4y^2 - 144 = 0$$

Cuya forma matricial asociada es:

$$(1 \quad x \quad y)\begin{pmatrix} -144 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -144 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -5184 \Rightarrow \text{ La curva en efecto es una elipse.}$$

En virtud de la simplicidad de este determinante (matriz diagonal), resulta sencillo obtener el resultado y usar la tabla anterior para concluir que en efecto es una elipse. Ahora bien, si consideramos la ecuación general dada por:

$$x^2 - 7y^2 + 3x - 4y + 2 = 0$$

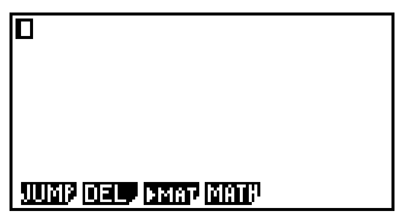
Notemos que:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} & -2 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(M) = -\frac{9}{4} \text{ y } \det(M_{11}) = -7 \Rightarrow \text{signo}\left(\det(M)\right) = \text{signo}(m_{22} + m_{33})$$

En consecuencia, la curva en cuestión es una hipérbola.

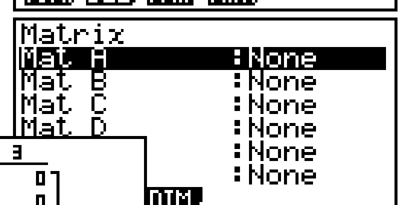
CÁLCULO DE DETERMINANTES USANDO CASIO *FX-9860GII*

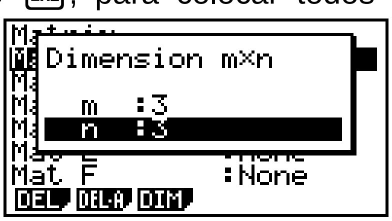
Ahora bien, ¿cómo podemos realizar estos cálculos de manera sencilla y sin perder la seguridad de que son correctos? Usaremos para ello, los recursos de la calculadora CASIO *fx-9860GII*.

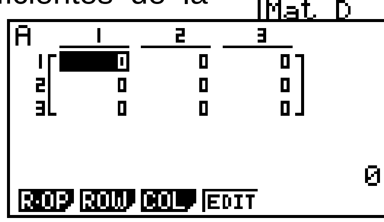


1. Presionamos MENU y 1, esto nos coloca en el modo RUN·MAT.

2. Ahora pulsamos F3 para acceder al submenú de matrices. Sobre `Mat A`, pulsamos EXE y seguidamente, aparecerá una pantalla para colocar el número de filas y columnas de la matriz. En los valores de m y n, colocamos 3 y en cada caso seguido de EXE, para colocar todos los coeficientes de la matriz.

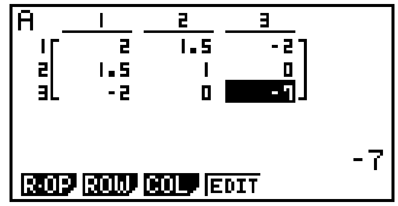




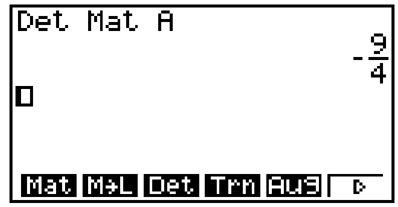


Todos los Derechos Reservados

3. Introducimos cada entrada de la matriz, seguido de la tecla EXE y obtenemos la matriz asociada a la cónica ya declarada y designada por la letra *A*. Resulta importante resaltar que si alguno de los valores es cero, se debe marcar de igual manera, ya que no los toma por defecto.



4. Pulsando EXIT dos veces seguidas volvemos al modo RUN·MAT. Luego, pulsamos OPTN F2, lo cual nos permite acceder a un submenú de opciones matriciales, dentro de las que destaca la opción para el cálculo de determinantes, que quedará marcada en pantalla al pulsar F3. Para obtener el determinante de la matriz declarada anteriormente y nombrada *A*, pulsamos F1 ALPHA X,θ,T lo que introduce la matriz *A*, pulsamos EXE y obtenemos el determinante deseado.



REGIONES EN EL PLANO

Resulta importante poder representar regiones en el plano, ya que estas pueden verse como la respuesta visual a un sinfín de situaciones, cuyo origen es la solución de inecuaciones en dos variables. Usemos las herramientas gráficas de la calculadora CASIO *fx-9860GII*, para tratar de visualizar regiones en el plano, considerando que no existe un módulo específico para resolver el problema completamente.

En primer lugar, consideraremos un problema básico de matemáticas en varias variables, a saber, tratar de encontrar el dominio de campos escalares y luego lo graficaremos.

Un *campo escalar*, es una función $f\colon\mathcal{D}\subseteq\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$, donde $\mathcal{D}$ representa el dominio de la función y este, es una región en el plano. Entonces, consideremos el siguiente campo escalar:

$$f(x,y)=\operatorname{arcsen}\left(\frac{\ln y}{x}\right)+\log_3\sqrt{9-x^2-y^2}$$

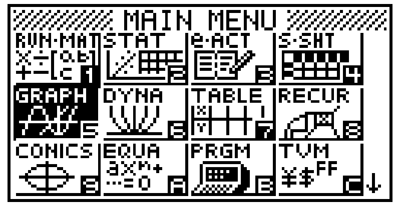
Entonces,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Dom}_f &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon -1\leq\frac{\ln y}{x}\leq 1 \text{ y } 9-x^2-y^2>0\right\}\\
&= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon -1\leq\frac{\ln y}{x}\leq 1\right\}\cap\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon 9-x^2-y^2>0\}\\
&= (\{(x,y)\colon e^{-x}\leq y\leq e^{x}, x>0\}\cup\{(x,y)\colon e^{-x}\geq y\geq e^{x}, x<0\})\cap\{(x,y)\colon x^2+y^2<9\}
\end{aligned}$$

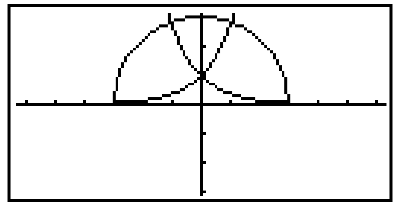
Usaremos entonces las herramientas de la calculadora CASIO *fx-9860GII*, para graficar estas regiones y poder visualizarlas.

Todos los Derechos Reservados

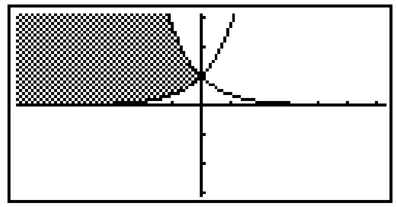
1. Presionamos [MENU] y seguidamente el número [5], al pulsar [EXE] entramos al modo gráfico.

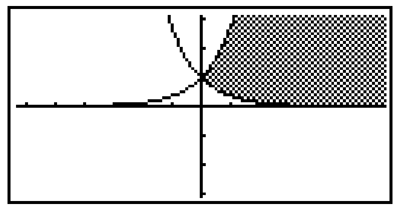


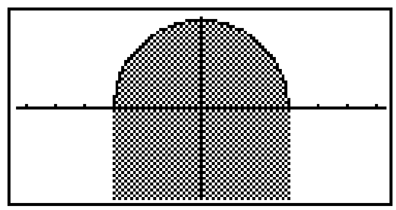
2. En cada una de las posiciones, colocamos las funciones involucradas en esos conjuntos, considerando que las funciones exponenciales aparecen en dos de los conjuntos y como necesitamos obtener dos regiones distintas, colocaremos estas funciones dos veces. Y al verificar que se tratan de regiones entre exponenciales, podemos omitir la región negativa de la región circular, en función de que corresponde con la intercepción de conjuntos. Al pulsar [EXE], dos veces después de la última función, nos queda la siguiente gráfica.

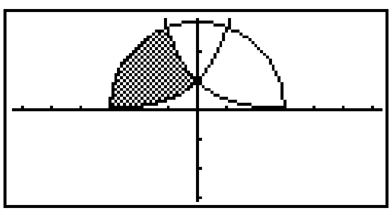


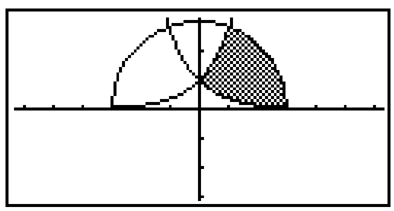
3. Para generar regiones sombreadas, procederemos a cambiar igualdades por desigualdades apropiadas según sea el caso. Para ello presionamos [EXIT] y nos ubicamos en la primera función que correspondería al primer conjunto, pulsamos [F3] (TYPE) [F5] (CONV) para buscar desigualdades y luego [F5] [EXE]. Para la segunda función, [F3] [F5] [F4]. En las siguientes invertimos el orden anterior y en la última, [F3] [F5] [F5]. Al graficar usando la tecla [EXE], observaremos la gráfica inicial. Esto se da en función de que no hay restricciones en el dominio y las desigualdades se "anulan". Para solventar esto, podemos "activar" algunas gráficas y "desactivar" otras, posicionándonos sobre las curvas en el listado y pulsando [F1] (SEL).



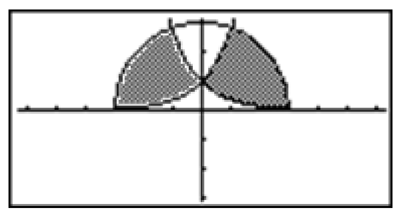








Superponiendo estas últimas gráficas, obtenemos la región buscada, que en efecto representa el dominio en términos de que es la unión de dos intersecciones, aplicando la propiedad distributiva en la última ecuación que representa al dominio.



REGIONES DEL PLANO DELIMITADAS POR CÓNICAS

En la sección anterior, pudimos observar una región delimitada por una función que se obtuvo a partir de un despeje de la circunferencia: $x^2 + y^2 = 9$ y en donde logramos representar la región debajo de la raíz superior. Ahora bien, resulta necesario poder conocer regiones bien definidas y por demás, poder visualizar un gráfico completo de la misma. Para ello, usaremos nuevamente el módulo gráfico, y seguidamente usaremos el módulo de cónicas para observar un caso particular, para el cual se deben hacer consideraciones especiales al momento de plantear la ecuación general de una cónica.

Todos los Derechos Reservados

Consideremos la siguiente ecuación general:

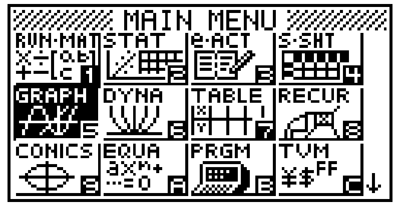
$$\boxed{x^2 + 4y^2 - 4x - 24y + 39 = 0}$$

Si completamos cuadrados, obtenemos que:

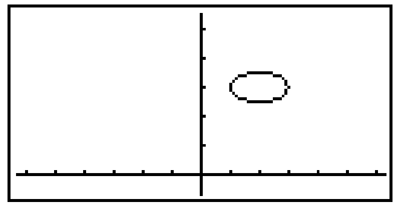
$$x^2 - 4x + 4 + 4(y^2 - 6y + 9) + 39 = 4 + 36 \Longrightarrow (x-2)^2 + 4(y-3)^2 = 1$$

de donde, podemos considerar las funciones:

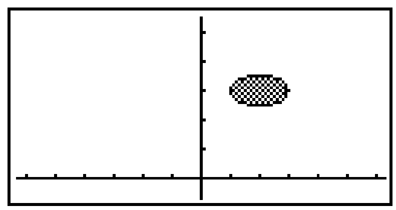
$$y = 3 + \frac{\sqrt{1-(x-2)^2}}{2} \quad \text{y} \quad y = 3 - \frac{\sqrt{1-(x-2)^2}}{2}$$



1. Presionamos [MENU] y seguidamente el número [5], al pulsar [EXE] entramos al modo gráfico GRAPH.



2. Usando las dos primeras posiciones, colocamos las funciones anteriores. Al colocar la primera función y como ella se diferencia de la segunda por un signo en la raiz, podemos copiar y pegar, posicionándonos en la primera función y luego, presionamos [SHIFT] [8] (CLIP) seguidamente, [F1] (COPY), con la tecla elíptica ▼ bajamos a Y2 y pulsamos [SHIFT] [9] (PASTE), nuevamente con la elíptica nos movemos a la izquierda y cambiamos el signo correspondiente y pulsamos [EXE] dos veces.

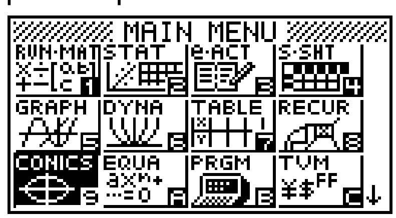


3. Para obtener la región sombreada, trabajaremos con desigualdades. Para ello, pulsamos [EXIT] y con ▲ buscamos la primera función y pulsamos [F3] (TYPE) [F5] (CONV) [F5] para colocar la desigualdad $\leq$, para la segunda función repetimos el proceso, colocando [F3] (TYPE) [F5] (CONV) [F4], al pulsar [EXE] dos veces, nos queda la región sombreada.

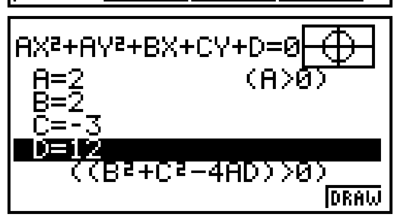
Ahora bien, podemos considerar la siguiente ecuación general:

$$\boxed{2x^2 + 2y^2 + 2x - 3y + 12 = 0}$$

A priori, parece representar a una circunferencia. Usemos ahora el módulo de cónicas de la calculadora CASIO *fx-9860GII*, para graficar esta curva y veamos que es posible hacerlo sin necesidad de completar cuadrados.



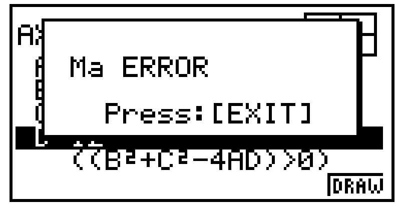
1. Presionamos [MENU] y seguidamente el número [9], al pulsar [EXE] entramos al menú de cónicas CONICS.



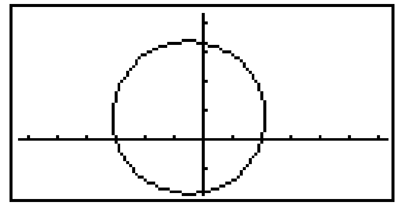
2. Con la tecla elíptica ▼ bajamos hasta ubicar la ecuación general de una circunferencia y pulsamos [EXE], colocamos los coeficientes correspondientes, seguidos de [EXE].

Todos los Derechos Reservados

3. Al pulsarlo nuevamente, obtenemos en la pantalla: `Ma ERROR`. En efecto, el error refiere a definición y se encuentra en los coeficientes usados, ya que aunque parecía una circunferencia, si usamos la tabla inicial podemos observar que se trata de una elipse imaginaria, es decir, no hay pares ordenados en el plano que satisfagan esta ecuación.



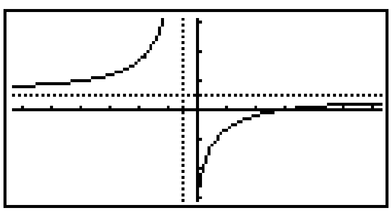
4. Presionando EXIT y cambiando el coeficiente `12` por `-12`, obtenemos una gráfica de una circunferencia trasladada de centro $\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$ y radio $r=\frac{\sqrt{109}}{4}$. Componentes que podremos determinar más adelante con los recursos que ofrece la calculadora CASIO *fx-9860GII*.



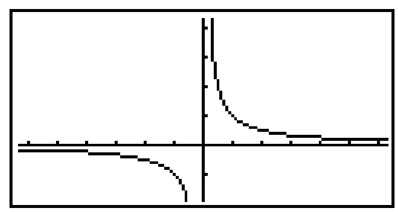
IMPORTANTE: En un curso básico de graficación, es usual graficar hipérbolas que construimos a partir de una función base llamada "Hipérbola Básica", incluyendo transformaciones verticales (estiramientos o achatamientos y traslaciones – arriba o abajo –), transformaciones horizontales (traslaciones – derecha o izquierda –). A saber, podemos construir hipérbolas de la forma:

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}\left(\frac{x+{}^{b}/_{a}+{}^{d}/_{c}-{}^{d}/_{c}}{x+{}^{d}/_{c}}\right)=\frac{a}{c}+\frac{r}{cx+d}$$

donde: $r=b-\frac{ad}{c}$. Por ejemplo, consideremos la hipérbola: $y=\frac{x-3}{2x+1}$, la cual proporciona la siguiente gráfica



A partir de la gráfica de la hipérbola básica

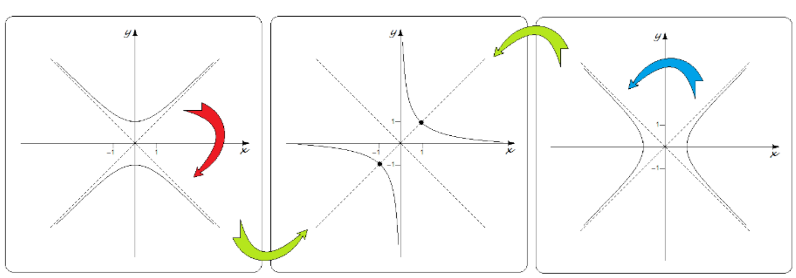


Entonces, si esta hipérbola básica es una hipérbola en el sentido de las ecuaciones estudiadas anteriormente, ¿cómo se puede obtener de la ecuación general de una cónica?

La respuesta es muy sencilla, considerando $A=B=D=E=0$ y $C=-F=1$, de donde nos queda la ecuación:

$$xy=1\Longrightarrow y=\frac{1}{x}$$

La cual es una rotación de 45^{o} en sentido a las agujas del reloj, de la hipérbola $y^2-x^2=2$, o bien una rotación de 45^{o} en sentido contrario a las agujas del reloj, de la hipérbola $x^2-y^2=2$.



Todos los Derechos Reservados