CÓNICAS, REGIONES EN EL PLANO Y APLICACIONES (PARTE II)

Prof. Rafael Cádiz y Prof. Andrés Pérez

OBJETIVO(S):

Aplicar en diferentes especialidades de la Ingeniería y la Arquitectura proyectos que destacan la gráfica aproximada de situaciones reales en el plano, utilizando la teoría de las cónicas y algunas funciones restringidas en su dominio. La creatividad, el ingenio del estudiante y del docente se usan para explorar el tema de Cónicas y funciones reales de variable real, justificándolo este hecho con la calculadora CASIO *fx-9860GII*.

Colocar sobre un conjunto de ejes cartesianos reales, el trazado de la figura esperada, como el resultado de operaciones entre conjuntos, delimitados por regiones en el plano que se obtiene por inecuaciones en dos variables.

RESUMEN:

El siguiente taller permite:

Identificar y representar ciertas gráficas aproximadas, con ayuda de algunas funciones reales y de algunas cónicas. La teoría de conjunto, nos ayuda a entender la notación matemática inmersa en el taller. Lo que se requiere es precisión y el manejo de relaciones donde las condiciones de definición envuelven: inecuaciones en dos variables y parte de la Geometría Analítica. Entenderemos de una manera práctica las bondades de las regiones en el plano, a través, de un desarrollo matemático en donde el talento artístico puede ser empleado. La calculadora CASIO *fx-9860GII*, es una herramienta que me permite ganar en tiempo y proporciona al participante una seguridad en los cálculos que necesita entender.

CONOCIMIENTOS PREVIOS:

- ✓ Nociones de conjunto
- ✓ Grafica de funciones de variable real
- ✓ Manejo de Ecuaciones de primero segundo grado en 1 o 2 variables
- ✓ Regiones en el plano
- ✓ Elementos notables de las cónicas
- ✓ Propiedades de las desigualdades
- ✓ Inecuaciones en dos variables

GRÁFICA DE ALGUNAS REGIONES USANDO LA CASIO *fx-9860GII*

Prof. Rafael Cádiz y Prof. Andrés Pérez

Ahora bien, ¿cómo podemos realizar estos cálculos de manera sencilla y sin perder la seguridad de que son correctos? Usaremos para ello, los recursos de la calculadora CASIO *fx-9860GII*.

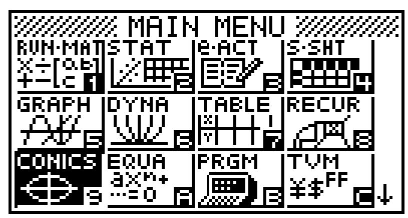
CASO 1: La región R dada es de la forma:

$$R = \{(x, y) : (x-2)^2 + \frac{(y-2)^2}{\frac{1}{4}} \leq 1\}$$

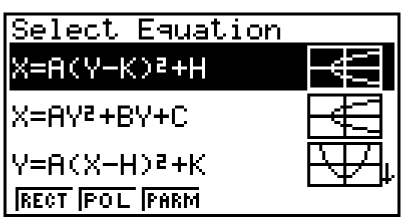
Ya una vez identificada la cónica, se generan las siguientes interrogantes ¿A qué parte de la cónica corresponde esta región?, ¿será la parte interna o la externa?, ¿incluirá o no el borde de la misma?

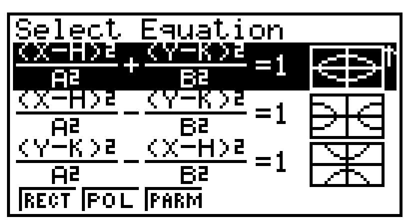
Entendamos que evaluar un punto en la condición de la región dada, indica que las regiones se dividen en dos partes una que satisface la desigualdad y la otra que sería el complemento; es decir; que no satisface la misma, si el punto a evaluar está en la parte interior de la cónica y satisface la condición la región buscada es la interna, de lo contrario es la externa.

1. Para ello, comencemos por presionar la tecla MENU y se desplegará la pantalla del menú principal. Dentro la galería de menús disponibles, debemos presionar el número 9, para acceder al menú CONICS, o con ayuda de la tecla elíptica te posicionas en CONICS y presionas EXE.

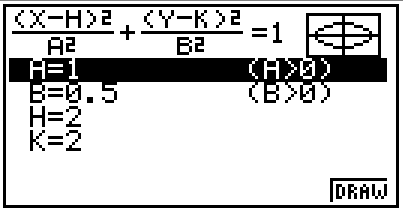


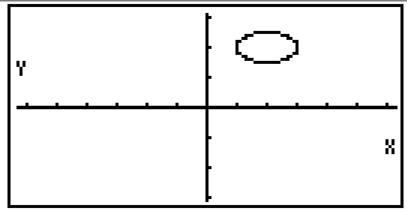
2. Se despliega el sub menú **`Select Equation`**, en el cual aparecen distintas ecuaciones de las cónicas, tanto ecuaciones generales como ecuaciones canonícas. Con ayuda de la tecla elíptica ▼ ubicamos la ecuacion canonica de la elipse y presionamos la tecla EXE.





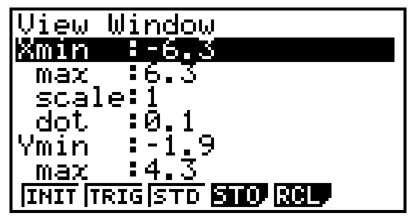
3. Seguidamente se le asignan a cada parámetro un valor requerido, para ello se presionan las teclas numéricas e inmediatamente la tecla EXE; el 1 para la A, y así sucesivamente, luego para observar la gráfica, se presiona la tecla F6.



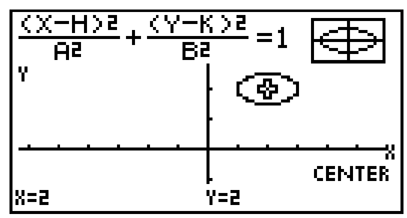


Para verificar con mayor precisión, cual es la región solicitada, procederemos a ubicar un punto (dentro o fuera de la cónica), sustituirlo en la desigualdad dada y si se satisface la condición eso me permitirá obtener la región deseada. El punto recomendado será el centro de la elipse. Para ello cambiaremos la ventana de visualización, con el fin de mejorar la gráfica y así poder observar con precisión el centro de la elipse.

4. Presionamos [F3] y pasamos a la pantalla **View Window**, procedemos a cambiar algunos datos; con ayuda de la tecla elíptica ▼ nos posicionamos en Ymin y presionamos las teclas [−] [1] [•] [9], inmediatamente [EXE], al posicionarnos en $\max$ procedemos de manera similar, presionamos las teclas [4] [•] [3] y [EXE]. Seguidamente la tecla [EXIT] y [F6].



5. Para visualizar el centro presionamos la tecla [F5] dos veces y obtenemos los valores deseados, los cuales son los que vamos a evaluar en la desigualdad.



$$((2)-2)^2+\frac{((2)-2)^2}{\frac{1}{4}}\leq 1 \Rightarrow 0\leq 1$$

Por lo tanto se satisface la condición y la región requerida es la parte interior de la elipse, al poseer el símbolo de menor o igual indica que el borde de la misma es parte de la región.

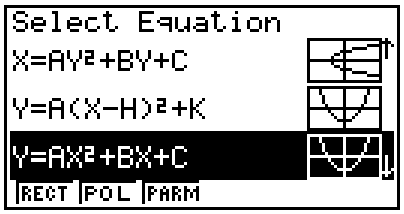
CASO 2: La región R dada es de la forma:

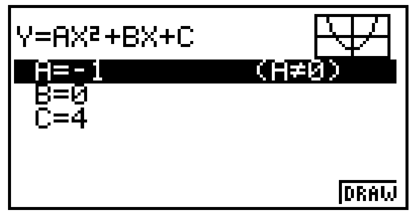
$$R=\{(x,y): y\geq -x^2+4\}$$

CÓNICAS, REGIONES EN EL PLANO Y APLICACIONES (PARTE II)

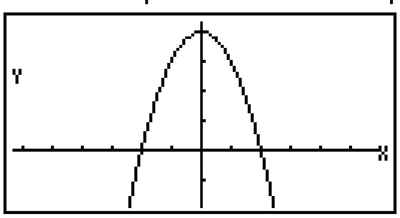
Prof. Rafael Cádiz y Prof. Andrés Pérez

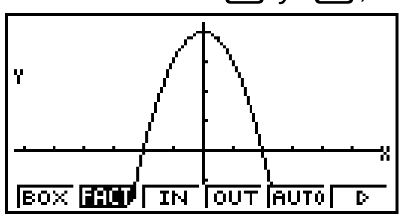
1. Procediendo de igual forma que el caso anterior, para ello, comencemos por presionar la tecla MENU 9, para acceder al menú CONICS, o con ayuda de la tecla elíptica te posicionas en CONICS y presionas EXE. Con ayuda de la tecla elíptica ▼ nos posicionamos en la ecuación general de una parábola. Sustituimos los coeficientes − 1 para la *A*, 0 para el *B* y 4 para el valor de *C*.

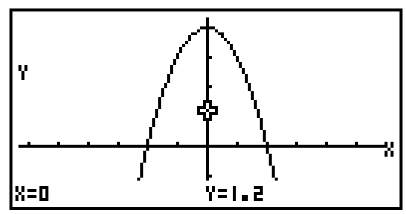




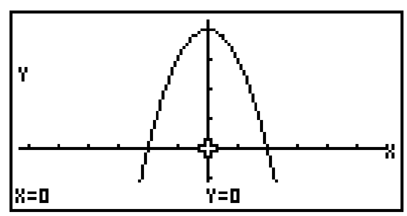
2. Para la gráfica asociada presionamos F6 y para verificar con mayor precisión, cual es la región solicitada, procederemos a ubicar un punto (dentro o fuera de la parábola), sustituirlo en la desigualdad dada y si se satisface la condición eso permitirá obtener la región deseada. Para ubicar el punto de estudio presionamos la tecla F2 y F3, obteniendo







3. Con ayuda de la tecla elíptica ▼ ubicamos el punto origen, siendo este el punto a evaluar.



$$(0) \geq -(0)^2 + 4 \Longrightarrow 0 \geq 4$$

Lo cual es una contradicción, lo que implica es que la región requerida es el complemento del lugar de ubicación del punto.

CÓNICAS, REGIONES EN EL PLANO Y APLICACIONES (PARTE II)

Prof. Rafael Cádiz y Prof. Andrés Pérez

ACTIVIDAD

Sea *U* el producto cartesiano de dos subconjuntos de números reales, los cuales indicaremos con R_1 y R_2, es decir, que $U = R_1 \times R_2$. Además, sean *A, B,…O,* subconjuntos de *U* tales que:

$A = \{(x, y): 9x^2 + 4y^2 \leq 144\}$
$B = \{(x, y): y$ es mayor o igual que $4x^2 - 1\}$
$C = \{(x, y): y$ es menor o igual que $1\}$
$D = \{(x, y): (x + 2)^2 + (y - 2)^2 \geq \frac{1}{16}\}$
$E = \{(x, y): x^2 + y^2 - 4x - 4y + 8 \geq \frac{1}{16}\}$
$F = \{(x, y): x \geq y^2 - 5;\ con\ x < 0\}$
$G = \{(x, y): x$ es menor o igual que $- y^2 + 5;$ con $x > 0\}$
$H = \{(x, y): (x + 2)^2 + 4(y - 2)^2 \leq 1\}$
$I = \{(x, y): x^2 + 4y^2 - 4x - 16y + 19 \leq 0\}$
$J = \{(x, y): 3x + 4y - 12$ es mayor o igual que $0\}$
$K = \{(x, y): 3x - 4y + 16 \leq 0\}$
$L = \{(x, y): y$ es mayor o igual que $x^2 - 4\}$
$M = \{(x, y): 2y$ es menor o igual que $x^2 - 4\}$
$N = \{(x, y): (x + 2)^2 + 4(y - 3)^2 = 1;$ con y mayor o igual que $3\}$
$O = \{(x, y): x^2 + 4y^2 - 4x - 24y + 39 = 0;$ con $y \geq 3\}$

Adicionalmente agregamos dos conjuntos para complementar el trabajo; es decir; realizar el mismo ejercicio pero tomando en cuenta los conjuntos $L*$ y $M*$, supliendo los conjuntos L y M.

$$L^* = \left\{(x, y): y \ \geq \ -\frac{x^2}{3} - 4\right\}$$

$$M^* = \{(x, y): 2y \ \leq \ -x^2 - 7\}$$

EJERCICIOS: 1

Responda en forma clara precisa y ordenada lo que se indica a continuación:

¿Desde el punto de vista de la geometría analítica que nombre recibe la figura representativa de cada conjunto indicado anteriormente (desde la letra *A* hasta la *O*)?.

Puede valerse de cualquier artificio matemático o tecnológico para justificar su respuesta, o si lo requiere consultar con los facilitadores de ser necesario.

De los doce (12) conjuntos señalados, a continuación indique con gráficos lo siguiente:

1. A
2. B intersección C
3. H intersección D
4. I intersección E
5. $D´$
6. $E´$
7. F intersección $A´$
8. G intersección $A´$
9. L intersección M o L* intersección M*
10. J intersección K intersección A
11. N
12. O

Nota: Los apostrofes significan complemento del conjunto respectivo.
Sugerencia: Colorear los conjuntos indicados con tres colores de su preferencia.

Color uno (1) para los conjuntos.

1. A
2. H intersección D
3. I intersección E
4. F intersección $A´$
5. G intersección $A´$

Color dos (2) para los conjuntos.

1. B intersección C
2. L intersección M o L* intersección M*

Color tres (3) para los conjuntos.

1. $D´$
2. $E´$
3. J intersección K intersección A
4. N
5. O

PREGUNTA:

A través de un desarrollo matemático y un desbordado talento artístico el participante será capaz de responder la siguiente interrogante:

¿Cómo se definen los rasgos obtenidos mediante los gráficos anteriores?