C+1 CASIO Académico VENEZUELA

UN EJEMPLO DE APLICACIÓN DE LOS RECURSOS DE LA CALCULADORA CASIO FX-9860GII PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACION

Prof. Andrés Pérez

OBJETIVO(S):

Resolver problemas de optimización de diversas complejidades, usando los recursos de la calculadora CASIO *fx-9860GII*. Usar el módulo gráfico de la calculadora fx-9860GII como una herramienta práctica en la obtención de valores extremos de curvas. Usar de forma complementaria el módulo gráfico de la calculadora CASIO *fx-9860GII*, y la herramienta de la evaluación de derivadas para la obtención de máximos y mínimos.

RESUMEN:

Optimizar, es maximizar o minimizar un proceso donde se presentan variaciones. Desde el punto de vista físico, no tiene sentido trabajar con problemas donde se obtengan valores críticos que no sean valores extremos, es decir, valores que no representen un máximo o mínimo dentro de la resolución de un problema. Ahora bien, resolver problemas de optimización implica entre otras cosas manejar conocimientos previos asociados a los problemas que se requieran resolver, para así ser capaces de poder representar el mismo mediante un modelo matemático. La calculadora CASIO *fx-9860GII*, dispone de un módulo gráfico capaz de representar las funciones que se generen del modelo matemático asociado a nuestros problemas y a partir de este discriminar las respuestas que se puedan derivar de estas gráficas y que tengan sentido físico . En consecuencia, la idea es tratar de adaptar los recursos de la calculadora CASIO *fx-9860GII* para obtener la solución de cualquier problema de optimización, dividido por etapas de análisis, con la idea clara de afianzar los conocimientos matemáticos resaltando las bondades de la calculadora CASIO *fx-9860GII*.

CONOCIMIENTOS PREVIOS:

El proceso puede servir para resolver casi cualquier problema de optimización, siempre y cuando se tenga conocimiento claro del procedimiento para determinar los valores críticos y luego, discriminar si son valores extremos por ello no seremos tan específicos en un listado de conocimientos previos, más allá de una base funcional. A saber:

- ✓ Dominio de funciones de variable real.
- ✓ Grafica de funciones básicas de variable real.
- ✓ Puntos clave de trazado de curvas básicas.
- ✓ Altura de una curva.
- ✓ Subconjuntos de la recta (Intervalos).
- ✓ Conocimientos inherentes al problema a solucionar, tales como: áreas, volúmenes, teoremas, fórmulas, etc.
- ✓ Derivadas de funciones de variable real.
- ✓ Teoremas asociados a las derivadas, crecimiento y concavidad, criterios de la primera y segunda derivada.

DESARROLLO:

Al resolver un problema de optimización, puede resultar conveniente seguir un proceso algorítmico que facilite la modelación matemática. Veamos a que hacemos referencia:

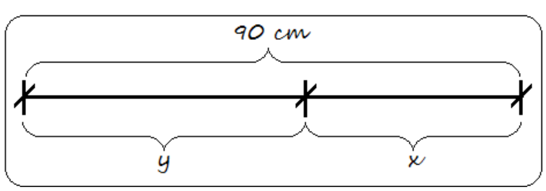
- Identificar las variables que se describen en el problema y que intervienen en el proceso.
- Construir una función de dos variables, que sirva como modelo matemático del problema a estudiar.
- Determinar algún valor numérico (estos valores pueden estar representados por letras), tal que se establezca una relación directa entre las variables. En este caso, son útiles los resultados previos tales como teoremas, axiomas, etc. A esta relación, comúnmente se le denomina *ecuación auxiliar*.
- De la ecuación auxiliar, escogemos la variable más conveniente para ser despejada. Esta escogencia depende del problema y del usuario.
- La variable despejada, debe ser sustituida en el modelo para así construir una función de una variable real y así, hacer el análisis de las derivadas y poder concluir en referencia a los valores extremos.

Consideraremos un problema específico como ejemplo, para poner en práctica el proceso antes descrito.

> Un alambre de 90 cm. de largo se va a partir en dos pedazos. Uno de los pedazos se doblará para formar un triángulo equilátero y el otro para formar una circunferencia. Hallar la longitud de cada uno de los pedazos, para que la suma de las áreas del triángulo y del círculo sea máxima.

SOLUCIÓN AL PROBLEMA

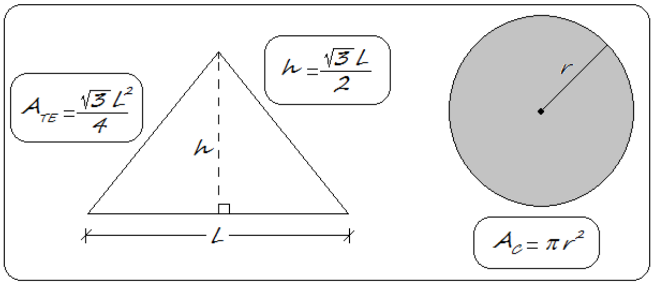
Supongamos que el alambre de 90 cm. lo cortamos en un punto que denotaremos por x, al otro pedazo lo denotaremos mediante la variable y. Por tanto, nos queda que: $x + y = 90$.



La cual representa para nosotros la ecuación auxiliar. Tomando y para construir el triángulo y el valor de x para construir la circunferencia, obtenemos que la función a optimizar está dada por:

$$A(x,y) = A_{TE}(y) + A_C(x)$$

Donde debemos recordar que:



Despejando y de la ecuación auxiliar, nos queda que: $y = 90 - x$, de donde:

$$f(x) = A(x, 90 - x) = A_{TE}(90 - x) + A_C(x)$$

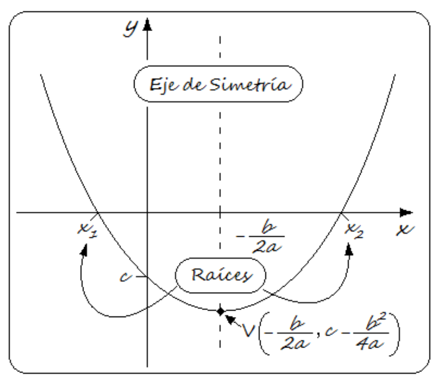
Finalmente, nuestra función de una variable es justamente:

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}(90 - x)^2}{36} + \frac{x^2}{4\pi}$$

En este caso, resulta importante recordar que una función cuadrática de la forma:

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

Donde para $a > 0$, la parábola abre hacia arriba y si $a < 0$, abre hacia abajo. Además, c representa el valor donde la parábola corta al eje y y las raíces (puntos de corte con el eje x), las podemos obtener resolviendo la ecuación de segundo grado:



$$ax^2 + bx + c = 0 \xrightarrow[\text{despejando } x]{} x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

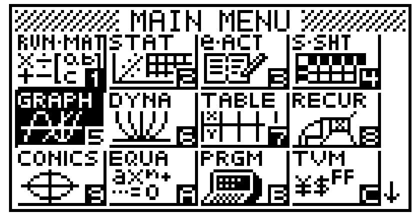
El vértice de la parábola se obtiene por: $V\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$

Desarrollando la parábola obtenida anteriormente, nos queda:

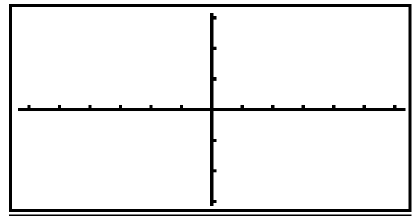
$$y = f(x) = \frac{9 + \pi\sqrt{3}}{36\pi}x^2 - 5\sqrt{3}x + 225\sqrt{3}$$

SOLUCIÓN USANDO SÓLO EL MODO GRÁFICO

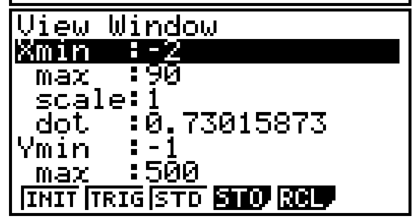
1. Presione [MENU] y dentro de la galería de menús disponibles, debemos presionar [5], para acceder al menú gráfico GRAPH.

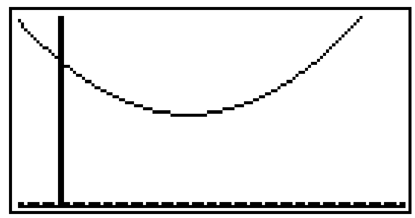


2. Dentro del menú gráfico, se desplegarán una galería de funciones disponibles para graficar (un máximo de 20 funciones). En la posición de **Y1**, introducimos la función $f(x)$ obtenida antes, la cual es una función cuadrática o bien, una función parabólica. La imagen que aparece no nos permite visualizar absolutamente nada porque la escala no es la adecuada para ello, en función de valores tan altos en los coeficientes.



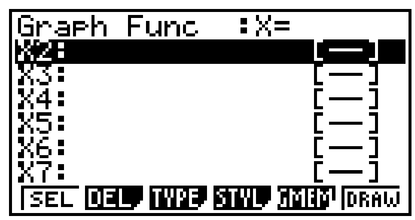
3. Para resolver esto podemos ingresar a la opción **`V-Window`** presionando [SHIFT] y luego [F3]. Allí, cambiaremos los valores dados por defecto. Coloquemos por ejemplo: `- 2` [EXE] `90` [EXE] y podremos observar que el valor del "**`dot`**" cambió a `0.73015873`, lo que nos proporciona más definición. Luego, con el cursor bajamos al mínimo de la otra variable y colocaremos `–1` [EXE] `500`. Al presionar [EXE] dos veces, volvemos al menú gráfico y presionamos nuevamente [EXE] para graficar y podremos visualizar la función de la derecha.



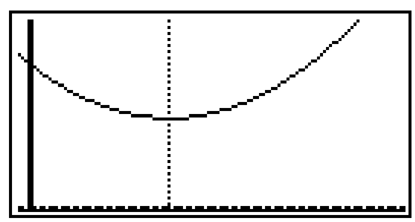


4. Como la parábola abre hacia arriba (el coeficiente del término cuadrático es positivo), entonces claramente la parábola tiene un mínimo, que podremos encontrar simplemente buscando el valor del eje de simetría:

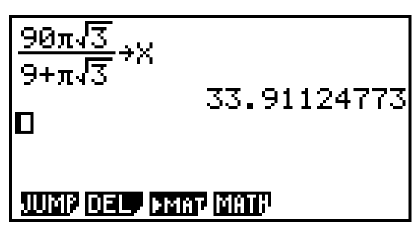
$$x = -\frac{-5\sqrt{3}}{2\left(\dfrac{9+\pi\sqrt{3}}{36\pi}\right)} = \frac{90\pi\sqrt{3}}{9+\sqrt{3}\pi}$$

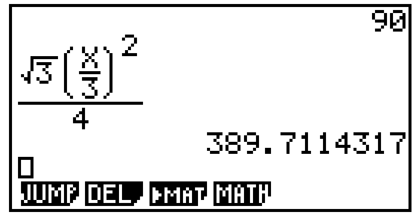


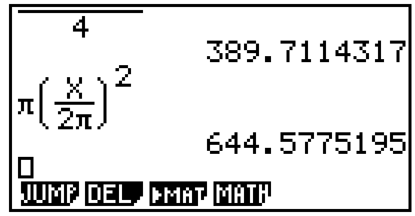
Para graficar esta, debemos cambiar el tipo de variable. Entonces, con [EXIT] nos regresamos hasta el listado de funciones y nos ubicamos en la posición **Y2**, pulsamos [F3] y luego [F4] para obtener una lista de funciones en la variable x. Escribimos la función ayudándonos con la tecla elíptica y las teclas adecuadas, pulsamos [EXIT] y de nuevo con la elíptica nos ubicamos en la función para cambiar el estilo, pulsamos [F4] dos veces y luego [EXE].



5. Usando el menú RUN·MAT ([MENU] [1]), calculamos este valor, en el cual obtenemos el valor mínimo de la función, asignándolo a una variable x, para luego calcular las áreas buscadas.







Observación: Es claro que hemos obtenido un mínimo y resulta que se necesitaba un máximo. Por tanto, debemos concluir que no debemos cortar el alambre para obtener un área máxima, pero ¿cuál área construimos? Simplemente, la que genere un número mayor, considerando $x = 90$. Colocamos el área del triángulo equilátero, recordando que debemos considerar $\frac{x}{3}$ para el lado y seguidamente, colocamos el área del círculo, recordando que se debe introducir el valor $\frac{x}{2\pi}$ para el radio. Ambos valores se obtienen de los perímetros respectivos.

Finalmente, podemos concluir que la figura que debemos construir es justamente la circunferencia, ya que el círculo es el que posee en mayor área

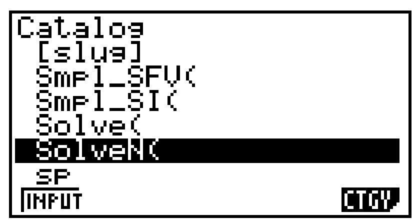
SOLUCIÓN USANDO DERIVADAS PARA ENCONTRAR EL VALOR CRÍTICO

En este caso, usaremos la derivada de la función para determinar el valor crítico que proporciona el valor extremo. Para ello, calculemos la derivada de la función f.

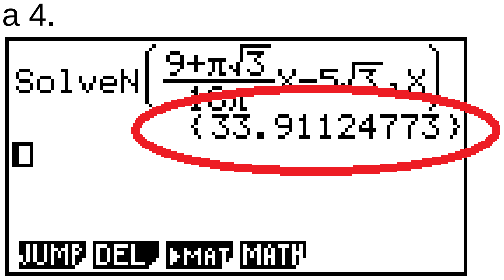
$$f'(x) = \frac{9 + \pi\sqrt{3}}{18\pi}x - 5\sqrt{3}$$

Dónde hallamos el valor crítico justamente cuando la derivada se anula. Entonces,

$$f'(x) = 0 \iff x = \frac{90\pi\sqrt{3}}{9 + \pi\sqrt{3}}$$

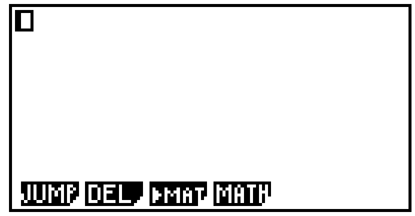


Para obtener este valor podemos hacer uso del comando **SolveN**, pulsando SHIFT y luego 4 (**CATALOG**) y con la tecla elíptica vamos hasta **SolveN** (recordar que están en orden alfabético), al encontrar el comando presionar EXE. Allí escribir la derivada obtenida seguido de , y luego, colocamos la variable x y cerramos el paréntesis). Este comando resuelve la ecuación igualada a cero en la variable indicada. Aparecerá una pantalla de **WARNING!**, donde debemos presionar EXIT. Este es justamente el valor que obtuvimos en la última pantalla de la página 4.

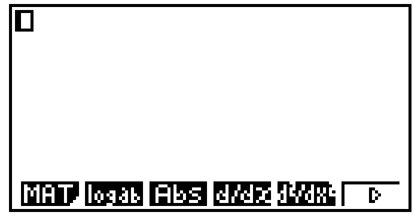


DETERMINACIÓN DE EXTREMOS CALCULANDO LA SEGUNDA DERIVADA

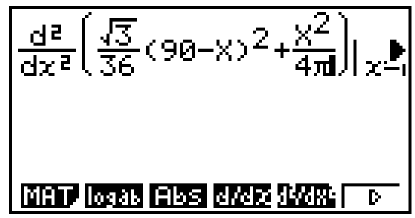
Para calcular los valores críticos, el proceso que se debe seguir es justamente el del apartado anterior. A saber, derivamos la función e igualamos a cero para determinar dónde la derivada se anula y dónde es posible que tenga un cambio de signo. Como la función derivada es una función afín, sólo tiene un valor donde se anula y por ende, no existe posibilidad de más de un cambio de signo en la derivada. Ahora bien, si queremos corroborar que realmente representa un mínimo, podemos basarnos en el criterio de la segunda derivada. Para ello,



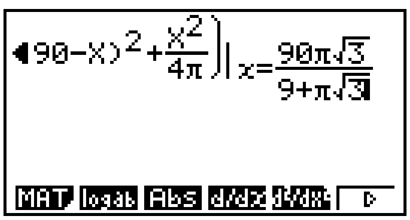
1. Presionamos MENU y seguidamente 1, esto nos coloca en el modo RUN-MAT.

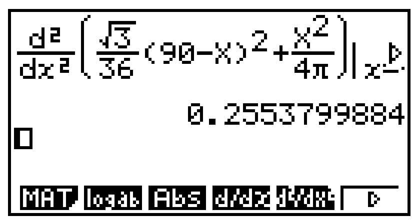


2. Presionamos F4 para buscar las herramientas matemáticas de cálculo, luego presionamos en dicha pantalla la tecla F5, donde buscamos la segunda derivada evaluada en el valor crítico obtenido anteriormente, pero podemos introducir la función originalmente obtenida.



3. En el espacio para el valor de la variable, debemos colocar el valor crítico obtenido, para determinar si realmente ese valor realiza un máximo o un mínimo. Se debe recordar que si la segunda derivada evaluada en el valor crítico es negativa, entonces se realiza un máximo y si es positiva, se realiza un mínimo (Criterio de la segunda derivada)





Al final, hemos obtenido el mismo resultado comparando métodos y recursos distintos de la calculadora CASIO *fx-9860GII*. Este último recurso, resulta importante de destacar en virtud de que es posible que la función original resulte muy difícil de graficar o de hallar el valor máximo o mínimo, desde el aspecto gráfico □

EJERCICIOS ADICIONALES:

Como una forma de observar que los recursos son versátiles, dejamos al lector los siguientes ejercicios para usar las técnicas expuestas y así poder mejorar la experiencia en el uso de la calculadora, basándonos en la práctica y la continuidad de procesos.

- Una tienda vende 100 neveras por semana a 4500 Bs. cada una. Una investigación de mercadeo indica que por cada 100 Bs. de descuento que ofrezca la tienda, el número de neveras se incrementaría en 1000 por semana:

i) Encuentre la función de demanda.
ii) ¿Cuán grande debe ser el descuento que ofrezca la tienda para maximizar su ingreso?
iii) Si la función de costo semanal es: $C(x) = 680000 + 1500x$, ¿cuál tiene que ser la magnitud del descuento para maximizar la utilidad?

- Un hombre que está en el mar, puede remar a una velocidad de 3 Km/h y caminar al doble de la velocidad. La costa es rectilínea. El punto más cercano de la costa es *P* y se encuentra a una distancia de 10 Km del hombre. El hombre se dirige a un punto *Q* de la playa que está a una distancia de 6 Km de *P*. Hallar el punto en que le conviene desembarcar, para que llegue lo antes posible al punto *Q*. Calcular el tiempo que puede tardar en llegar.

- Encuentre las dimensiones del cilindro circular de volumen máximo que puede inscribirse en un cono de 12 cm de altura y base de 4 cm de radio, suponiendo que los ejes del cilindro y del cono coinciden.

- Una esfera tiene un radio de 6*cm*. Hallar la altura del cilindro de volumen máximo inscrito en ella.

- Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en la elipse:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

- Una esfera tiene un radio de 6 cm. Hallar la altura del cilindro de volumen máximo inscrito en ella.

- Un triángulo isósceles de perímetro 30 cm gira alrededor de su altura obteniéndose un cono. Hallar el valor de la longitud de la base del triángulo para que el volumen del cono sea máximo.