ENSEÑANZA

CASIO Académico VENEZUELA

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES E INVERSAS DE MATRICES

Dr. Andrés Pérez

OBJETIVO(S):

Utilizar el Método de Gauss o el de Gauss-Jordan, como herramienta principal de solución de sistemas de ecuaciones lineales de dos o tres ecuaciones con el mismo número de incógnitas, usando los recursos de la calculadora CASIO *fx-9860GII*. Fomentar el uso de las operaciones elementales por filas y/o columnas, cómo método de simplificación de sistemas, entendiendo que son recursos pre-establecidos en la calculadora CASIO *fx-9860GII*. Promover la Regla de Cramer, como método de solución de sistemas de ecuaciones, aprovechando el uso de los determinantes en la calculadora CASIO *fx-9860GII.* Encontrar inversas de matrices usando el método de Gauss-Jordan. En los casos 2x2, verificar las soluciones de los sistemas con la ayuda del módulo gráfico de la calculadora CASIO *fx-9860GII*.

RESUMEN:

En general, los sistemas de ecuaciones lineales se comienzan a trabajar desde muy temprano en la educación media. Al principio, se comienzan con sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas y allí, los estudiantes tienen su primer encuentro con métodos de solución, tales como: Método de Reducción, Método de Sustitución y Método de Igualación. Estos métodos, podrían verse afectados en su accionar cuando se incrementan el número de ecuaciones e incógnitas en el sistema, en virtud de que la operatividad de ellos está diseñada para sistemas de dos ecuaciones en casi todo caso. Es por ello, que la combinación de estos métodos genera procesos más eficaces en el tiempo y con un costo computacional realmente bajo, en términos de que podemos diseñar procesos de solución sólo con operaciones básicas y con la única presencia de los coeficientes.

Es bien sabido que el comportamiento de un sistema de ecuaciones, está unívocamente determinado por el comportamiento de sus coeficientes; así pues podemos determinar la solución de un sistema simplemente usando los coeficientes y para ello, una de las opciones más claras puede ser la Regla de Cramer, pero desde el álgebra lineal la opción más usada por su versatilidad puede ser justamente el Método de Gauss-Jordan. En ambos casos, la calculadora CASIO *fx-9860GII* resulta una herramienta importante, ya que basándonos en los procesos pre-establecidos en ella, la convierten en una herramienta ideal.

CONOCIMIENTOS PREVIOS:

Dado un sistema de ecuaciones de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x + & a_{12}y + & a_{13}z = a \\ a_{21}x + & a_{22}y + & a_{23}z = b \\ a_{31}x + & a_{32}y + & a_{33}z = c \end{cases}$$

Todos los Derechos Reservados

donde los $a_{ij} \in \mathbb{R}\,, i, j = 1,2,3$ y a, b y $c \in \mathbb{R}$, resulta importante determinar a priori si tiene solución o no. Para ello, resulta necesario conocer:

- ✓ Determinantes.
- ✓ Métodos usuales para la resolver sistemas de ecuaciones lineales: Reducción, Sustitución e Igualación.
- ✓ Operaciones elementales por filas.
- ✓ Graficas de funciones básicas.

DESARROLLO:

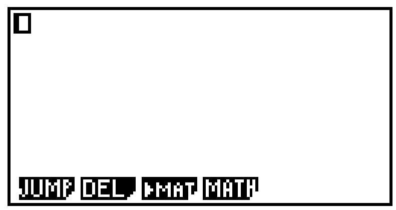
En primer lugar determinaremos si el sistema dado por:

$$\begin{cases} 3x - \quad y + \quad 4z = 5 \\ \;\, x + \quad y - \quad\; z = 2 \\ 2x + \quad 2y + \quad z = 1 \end{cases}$$

Es un sistema compatible determinado (tiene solución única), Compatible indeterminado (infinitas soluciones) o es incompatible (no tiene soluciones). Para ello, usaremos la matriz de sus coeficientes. Veamos,

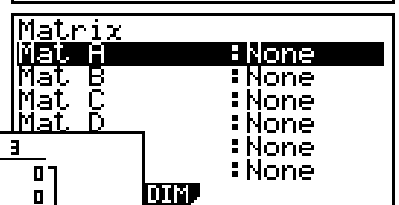
$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

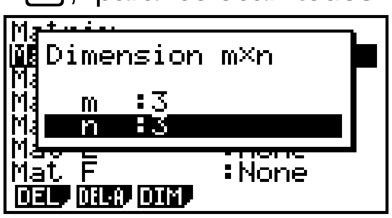
Ahora bien, si el determinante de esta matriz es no nulo, tendremos que el sistema tiene solución única. Usaremos los recursos de la CASIO *fx-9860GII* para realizar este cálculo.

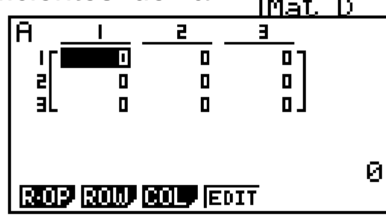


1. Presionamos [MENU] y [1], esto nos coloca en el modo RUN·MAT.

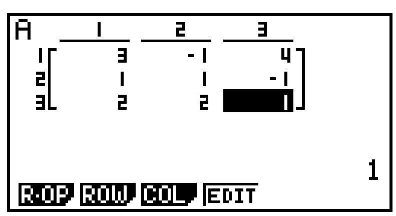
2. Ahora pulsamos [F3] para acceder al submenú de matrices. Sobre `Mat A,` pulsamos [EXE] y seguidamente, aparecerá una pantalla para colocar el número de filas y columnas de la matriz. En los valores de m y n, colocamos 3 y en cada caso seguido de [EXE], para colocar todos los coeficientes de la matriz.







3. Introducimos cada entrada de la matriz, seguido de la tecla [EXE] y obtenemos la matriz asociada a la cónica ya declarada y designada por la letra A. Resulta importante resaltar que si alguno de los valores es cero, se debe marcar de igual manera, ya que no los toma por defecto.



4. Pulsando [EXIT] dos veces seguidas volvemos al modo RUN·MAT. Luego, pulsamos [OPTN] [F2], lo cual nos permite acceder a un submenú de opciones matriciales, dentro de las que destaca la opción para el cálculo de determinantes, que quedará marcada en pantalla al pulsar [F3]. Para obtener el determinante de la matriz declarada anteriormente y

Todos los Derechos Reservados

nombrada A, pulsamos [F1] [ALPHA] [X,θ,T] lo que introduce la matriz A, pulsamos [EXE] y obtenemos el determinante deseado. Claramente, como no es nulo podemos inferir que el sistema tiene solución única y por tanto, tiene sentido dedicarnos a calcular la solución de dicho sistema.

SOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECACIONES USANDO REGLA DE CRAMER

Recordando un poco la regla, podemos notar que para un sistema de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x + \quad a_{12}y + \quad a_{13}z = a \\ a_{21}x + \quad a_{22}y + \quad a_{23}z = b \\ a_{31}x + \quad a_{32}y + \quad a_{33}z = c \end{cases}$$

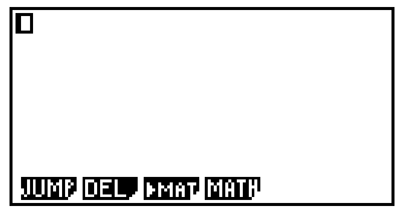
Tenemos que la solución está dada por:

$$x = \frac{\text{Det } B}{\text{Det A}}\ , y = \frac{\text{Det } C}{\text{Det A}}\ \text{ y } z = \frac{\text{Det } D}{\text{Det A}}$$

Donde $D \neq 0$, ya que representa el determinante de la matriz de coeficientes del sistema y los otros determinantes corresponden con:

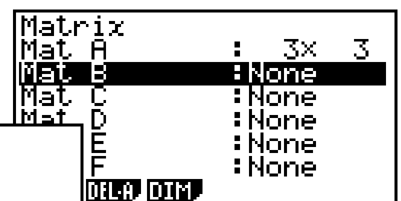
$$\text{Det } B = \begin{vmatrix} a & a_{12} & a_{13} \\ b & a_{22} & a_{23} \\ c & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\ , \text{Det } C = \begin{vmatrix} a_{11} & a & a_{13} \\ a_{21} & b & a_{23} \\ a_{31} & c & a_{33} \end{vmatrix}\ , \text{Det } D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a \\ a_{21} & a_{22} & b \\ a_{31} & a_{32} & c \end{vmatrix}$$

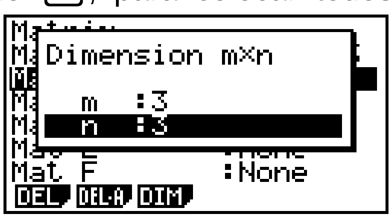
Entonces, definamos las matrices asociadas al resto de los determinantes y busquemos la solución del sistema de ecuaciones:

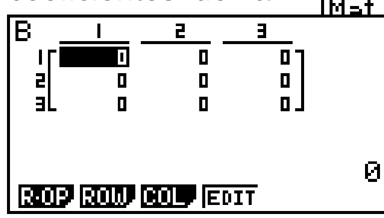


1. Presionamos [MENU] y [1], esto nos coloca en el modo RUN·MAT.

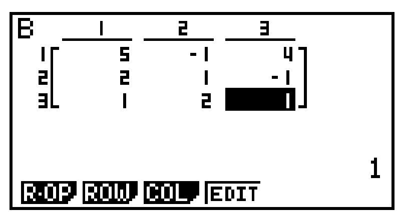
2. Ahora pulsamos [F3] para acceder al submenú de matrices. Sobre Mat B, pulsamos [EXE] y seguidamente, aparecerá una pantalla para colocar el número de filas y columnas de la matriz. En los valores de m y n, colocamos 3 y en cada caso seguido de [EXE], para colocar todos los coeficientes de la matriz.



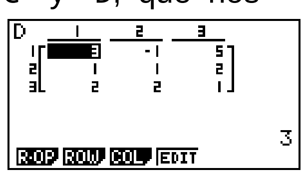


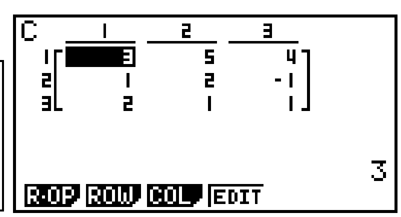


3. Introducimos cada entrada de la matriz, seguido de la tecla [EXE] y obtenemos la matriz asociada a la cónica ya declarada y designada por la letra B. Resulta importante resaltar que si alguno de los valores es cero, se debe marcar de igual manera, ya que no los toma por defecto.



4. Repetimos el proceso para las matrices C y D, que nos proporcionarán los determinantes $\text{Det } C$ y $\text{Det } D$.

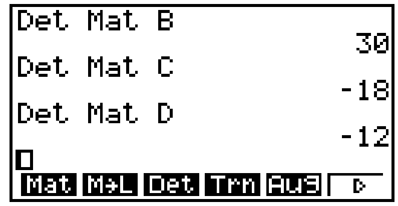




Todos los Derechos Reservados

5. Calculando los determinantes, obtenemos los siguientes valores, de donde podemos establecer que:

$$x = \frac{30}{12} = \frac{5}{2}\, , y = \frac{-18}{12} = -\frac{3}{2}\, , z = \frac{-12}{12} = -1$$



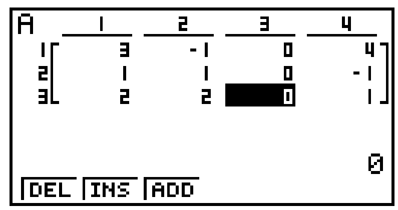
SOLUCIÓN AL SISTEMA DE ECUACIONES USANDO MÉTODO DE GAUSS-JORDAN

Recordemos que las operaciones elementales por filas (columnas – el espacio fila y el espacio columna son equivalentes), en realidad engloban sólo las siguientes:

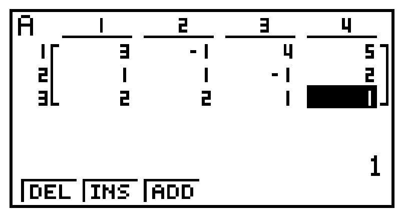
- Intercambio de posición entre filas, que equivale al intercambio de posición de dos ecuaciones.
- Multiplicación de filas por escalares no nulos, o bien multiplicación de ecuaciones por escalares no nulos.
- Suma a una fila un múltiplo escalar de otra, o bien suma a una ecuación un múltiplo escalar de otra.

Entonces, lo primero que haremos es ampliar la matriz con el vector solución. Para ello:

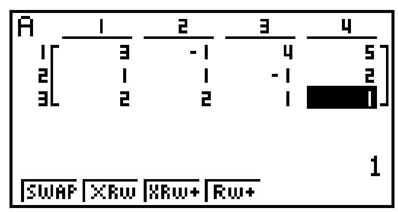
1. Nos colocamos sobre la matriz `A` en la última columna y seguidamente pulsamos F3 `(COL)` y luego, F2 `(INS)`, nos aparecerá la siguiente matriz, que debemos editar, ya que la cuarta columna corresponde a la tercera y la cuarta debe ser el vector solución.



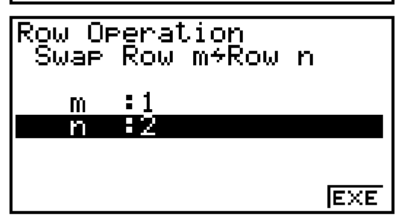
2. Después de hacer la edición correspondiente y verificando que nuestros coeficientes corresponden con los correctos en nuestra matriz aumentada, obtenemos la siguiente matriz cuya dimensión es 3×4.

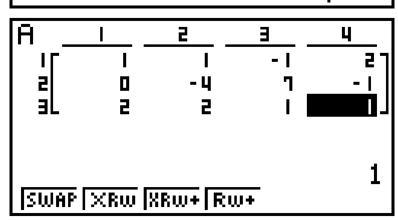


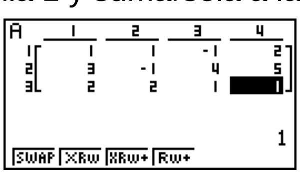
3. Pulsamos EXIT y luego F1 (`R-OP – Row Operations`) de donde nos queda la pantalla de la derecha. Desde F1 hasta F4, encontramos las operaciones elementales por filas en ese orden: `SWAP` – Intercambio entre filas, `XRw` – Multiplicación de un escalar por una fila, `XRw+` - Multiplicación de un escalar por una fila y sumar con otra, `Rw+` - Suma de filas.



4. Intercambiaremos la fila 1 con la fila 2, para colocar el número 1 en la primera entrada de la matriz. Entonces, pulsamos F1 y colocamos `m : 1 , n : 2` y pulsamos EXE lo que nos da la matriz de abajo. Luego, pulsamos F3 para multiplicar por -3 a la fila 1 y sumársela a la 2 y la asignamos a la 2.

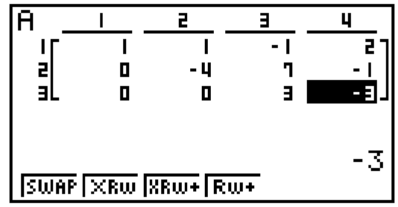




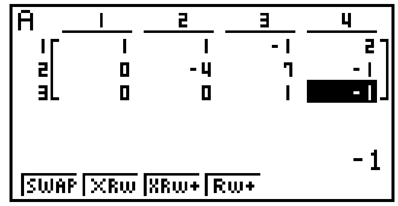


Todos los Derechos Reservados

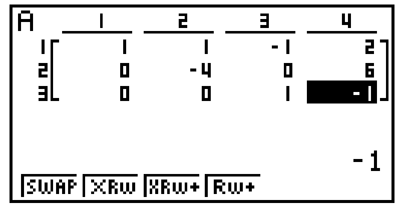
5. Hacemos el mismo proceso, para multiplicar por -2 a la primera y sumarlo a la tercera y asignarlo a la tercera.

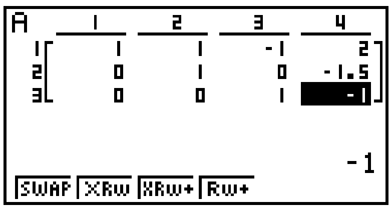


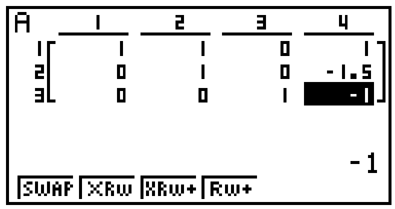
6. Luego, multiplicamos a la tercera fila por $\frac{1}{3}$ y se la asignamos a la tercera fila, con lo que obtenemos la tercera fila de la matriz identidad 3×3.

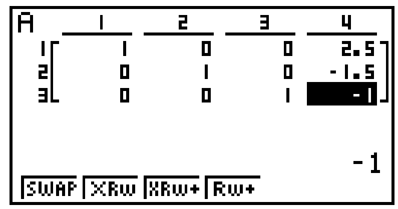


7. Multiplicamos a la tercera fila por -7 y se la sumamos y asignamos a la segunda. Seguidamente, multiplicamos por $-\frac{1}{4}$ a la segunda fila y se la asignamos a la segunda. Para las últimas dos operaciones, sumamos la tercera y la primera pulsando F4 (m : 3 , n : 1) y finalmente, multiplicamos por -1 a la segunda y se la sumamos y asignamos a la primera.









De donde podemos darnos cuenta que la solución del sistema está dada por:

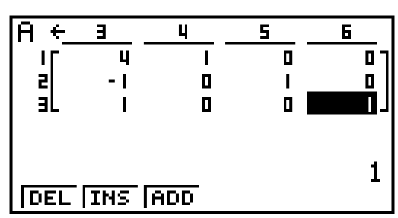
$$x = 2.5 = \frac{5}{2}\,, y = -1.5 = -\frac{3}{2}\,, z = -1$$

que coincide con la solución obtenida mediante la Regla de Cramer.

CALCULO DE MATRICES INVERSAS

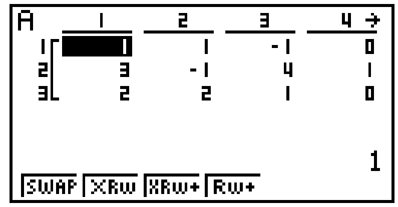
Debemos recordar que una matriz A es invertible, si y sólo si, $\mathrm{Det}\ A \neq 0$. Ahora bien, corroborar esto con la CASIO *fx-9860GII* resulta sencillo y ya lo hemos intentado. Además, por definición debe satisfacer que exista una matriz B tal que, $A.B = B.A = I$, donde $B = A^{-1}$. Considerando la matriz A del sistema de ecuaciones inicial, procederemos a calcular su matriz inversa y para ello, usaremos el método de Gauss-Jordan nuevamente, entendiendo que las operaciones elementales por filas que le hicimos a la matriz para llevarla a la identidad y obtener los valores de las variables, se las debemos realizar de manera simultánea a la matriz identidad. ¿Cómo realizamos este proceso? Es muy sencillo, a la matriz original le aumentamos tres columnas de igual forma que aumentamos para el sistema, las cuales corresponderán con las columnas de la matriz identidad. Veamos,

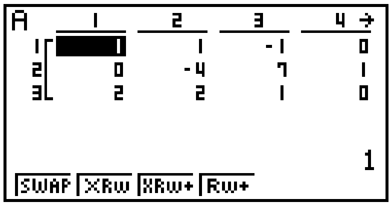
1. Presionamos MENU y seguidamente el número 1, luego F3 al entrar a la matriz A podemos introducir una matriz 3×6, o bien aumentar 3 columnas a la matriz original y colocar los coeficientes de tal forma que la matriz de columnas 4, 5 y 6 resulte la matriz identidad.

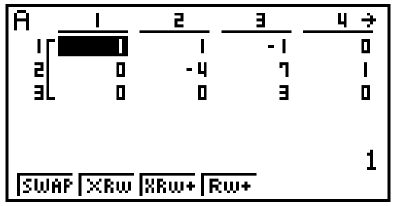


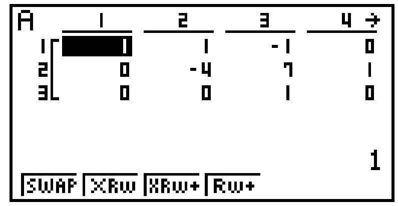
Todos los Derechos Reservados

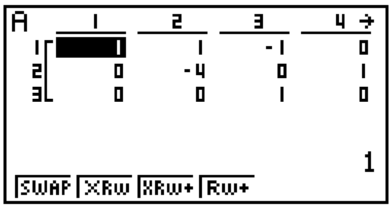
2. Realizando exactamente las mismas operaciones elementales por filas que en el ejercicio anterior y en el mismo orden obtendremos la siguiente secuencia de matrices, donde debemos observar la matriz resultante en las columnas 4, 5 y 6, que justamente representará la matriz inversa de la matriz original `A`.

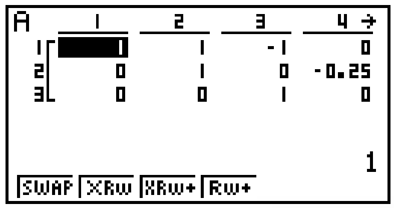


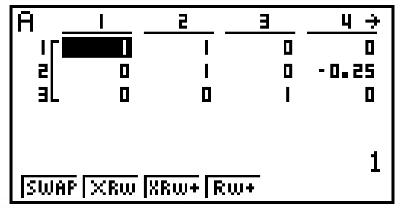


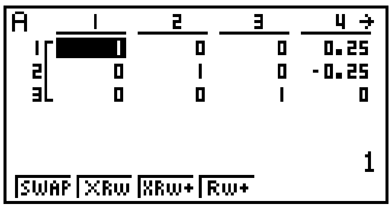


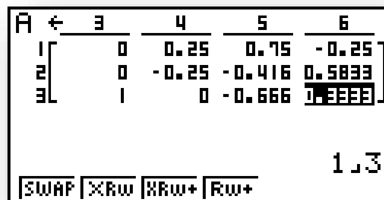










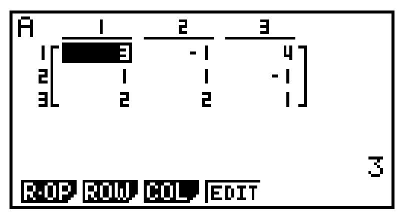


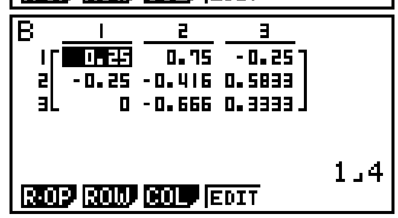
Esta última matriz, es justamente la matriz inversa de la matriz original. Al situarnos sobre cada una de las entradas de la matriz resultante, obtenemos los valores que dieron origen a esos números decimales. A saber,

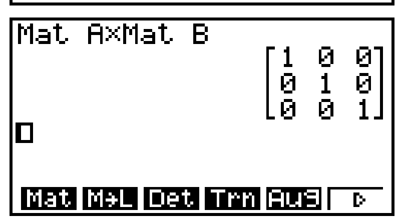
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{5}{12} & \frac{7}{12} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

1. Procedemos a declarar estas matrices, es decir la matriz original `A` y la matriz inversa A^{-1}, que denotaremos por `B`, para luego proceder a multiplicarlas y verificar que la matriz obtenida es realmente la inversa buscada.

2. Presionamos MENU y seguidamente el número 1, luego pulsamos OPTN F2, al pulsar F1 ALPHA X,θ,T aparece en pantalla `Mat A`, pulsamos la tecla de multiplicación luego F1 ALPHA log y aparecerá `Mat B.` Al pulsar EXE, nos queda la matriz identidad. Si se realiza la operación contraria obtenemos el mismo resultado, por lo que: $B = A^{-1}$.







Todos los Derechos Reservados

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

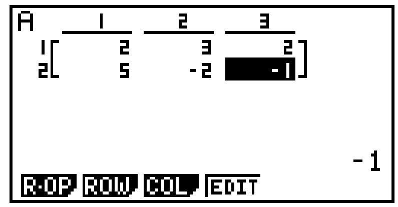
$$\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 5x - 2y = -1 \end{cases}$$

Si bien es cierto puede ser resuelto por cualquier método conocido, lo resolveremos usando las técnicas vistas en este documento. Por ello, verificamos en primera instancia si el sistema tiene solución única:

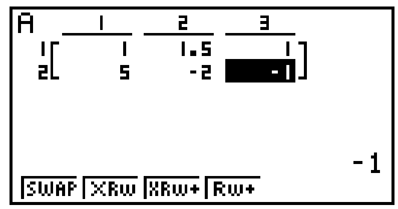
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{Det} A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 15 = -19 \neq 0$$

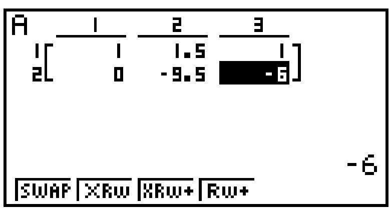
Entonces:

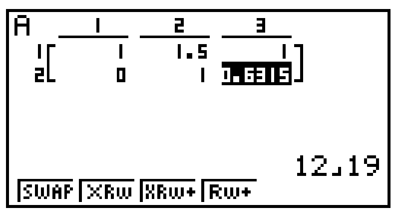
1. Presionamos [MENU] y seguidamente el número [1], seguidamente, pulsamos [F3] para entrar al submenú de matrices. Pulsamos [EXE] en la matriz A y colocamos en la dimensión `m : 2 , n : 3`, para generar la matriz aumentada de una vez.

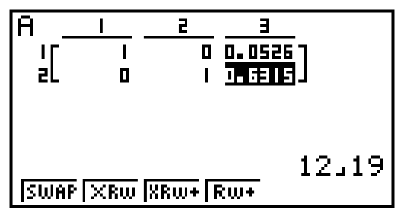


2. Usando las operaciones elementales por filas al pulsar [F1], luego [F2] y colocamos `k : ½ , m : 1` [EXE]. Ahora para colocar el cero en la posición 2-1, pulsamos [F3] y luego, `k : -5 , m : 1 , n : 2` [EXE] ⟶ [F2] `k : -2/19 , m : 2` [EXE] ⟶ [F3] `k : -3/2 , m : 2 , n : 1` [EXE].







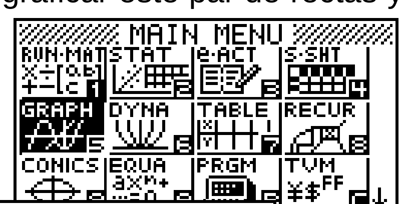


Situándonos sobre los valores del lado derecho, obtenemos sus representaciones fraccionarias, las cuales están dadas por:

$$x = \frac{12}{19} \quad , \quad y = \frac{1}{19}$$

Ahora bien, usando el módulo gráfico de CASIO *fx-9860GII*, podemos graficar este par de rectas y verificar la respuesta.

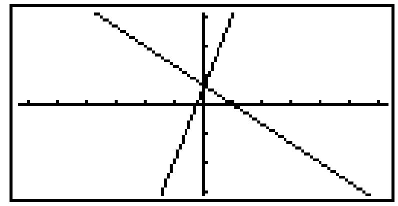
1. Presionamos [MENU] y seguidamente el número [5], al pulsar [EXE] entramos al menú de cónicas GRAPH.



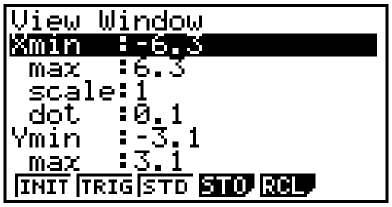
2. Al pulsar [EXE] colocamos las funciones despejando la variable y, en el formato que deseemos y luego pulsamos [EXE].

Todos los Derechos Reservados

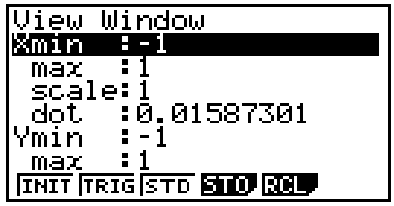
3. Al graficar obtenemos la siguiente gráfica, donde no podemos apreciar en forma clara la solución.

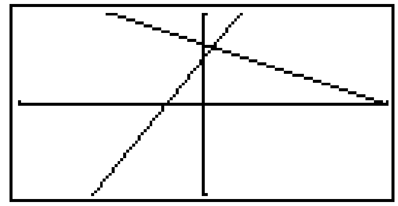


4. Para corregir esto, pulsamos F3 para cambiar la escala que trae por defecto la calculadora, a una donde se pueda apreciar la solución, entonces colocamos: `Xmin : -1 , max : 1` y lo mismo para los valores de la variable y.

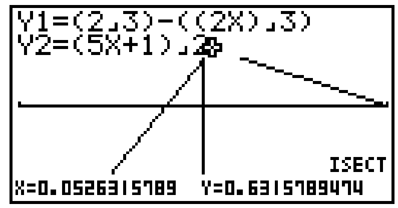


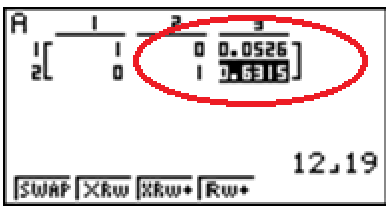
→

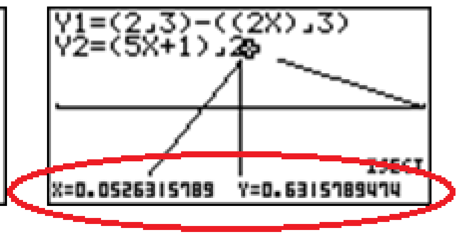




5. Pulsamos F5 dos veces y obtenemos la intersección de ambas rectas. Si verificamos los valores obtenidos con los valores que proporcionó la última matriz, podeos constatar la coincidencia de los mismos.





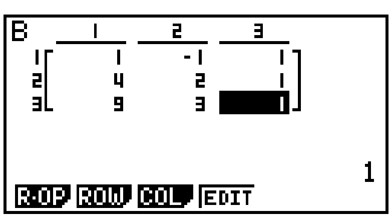


EJERCICIO: Determine la ecuación de la parábola que pasa por los puntos $A(-1{,}4), B(2{,}1)$ y $C(3,-3)$.

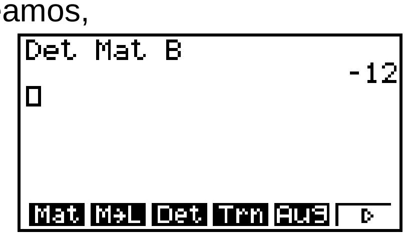
SOLUCIÓN: La ecuación canónica de la parábola es de la forma: $y = ax^2 + bx + c$. La cual debe verificar cada uno de los puntos, generando tres ecuaciones, que se deben resolver en forma simultánea y esto genera un sistema de ecuaciones de la forma:

$$\begin{cases} a - b + c = 4 \\ 4a + 2b + c = 1 \\ 9a + 3b + c = -1 \end{cases}$$

Ahora bien, ¿esta parábola existe? Para responder esto bastaría con verificar que el determinante de la matriz asociada al sistema sea distinto de cero. Veamos,



⟹



Cómo la parábola en efecto existe, queda como ejercicio al lector encontrarla usando los recursos mostrados y graficarla usando el módulo gráfico de la calculadora CASIO *fx-9860GII*, además de verificar cada uno de los puntos dados sobre la gráfica.

Todos los Derechos Reservados