UN EJEMPLO DE APLICACIÓN DE LOS RECURSOS DE LA CALCULADORA CASIO FX-9860GII PARA LA RESOLUCIÓN DE INECUACIONES

Prof. Andrés Pérez

OBJETIVO(S):

Resolver inecuaciones de diversas complejidades, usando los recursos de la calculadora CASIO *fx-9860GII*. Usar el módulo gráfico de la calculadora CASIO *fx-9860GII* como una herramienta práctica en la resolución de inecuaciones. Usar de forma complementaria el módulo gráfico de la calculadora CASIO *fx-9860GII*, y el módulo Matemático para determinar intervalos de solución de inecuaciones.

RESUMEN:

Una *inecuación*, es una desigualdad entre dos expresiones algebraicas. Desde el punto de vista de la solución buscada, la diferencia fundamental es que una inecuación tiene una solución conjuntista que a diferencia de las ecuaciones polinómicas, son soluciones con un número infinito de posibilidades, es decir, como estamos resolviendo inecuaciones sobre la recta real, las soluciones son intervalos, o uniones de intervalos o en su defecto el conjunto vacío. Ahora bien, la calculadora CASIO *fx-9860GII*, no dispone de un módulo capaz de resolver este tipo de planteamientos, ni siquiera desde su aspecto más sencillo, por ejemplo, cuando una recta es mayor o menor que cero. En consecuencia, la idea es tratar de adaptar los recursos de la calculadora CASIO *fx-9860GII* para obtener la solución de cualquier inecuación y en esa búsqueda, afianzar los conocimientos matemáticos resaltando las bondades de la calculadora CASIO *fx-9860GII*.

CONOCIMIENTOS PREVIOS:

El proceso puede servir para resolver casi cualquier inecuación, por ello no seremos tan específicos en un listado de conocimientos previos, más allá de una base funcional. A saber, necesitamos resolver inecuaciones de la forma:

$$\boxed{f(x) \leq g(x)}$$

Donde $f \; y \; g$ son funciones conocidas (tomamos esta desigualdad como referencial). En consecuencia, el estudiante debe estar familiarizado con:

- ✓ Dominio de funciones de variable real.
- ✓ Grafica de funciones básicas de variable real.
- ✓ Puntos clave de trazado de curvas básicas.
- ✓ Altura de una curva.
- ✓ Subconjuntos de la recta (Intervalos).
- ✓ Notación conjuntista y notación algebraica de intervalos.

Observación: Puede darse el caso de que no exista la forma analítica de resolver la inecuación, en virtud de que corresponde a funciones cuya comparación de alturas se dificulta por la naturaleza de su inversa. A saber, cuando se establecen comparaciones entre Exponenciales y polinomios, Trigonométricas vs. Polinomios o inclusive Exponenciales vs. Trigonométricas, entre otras.

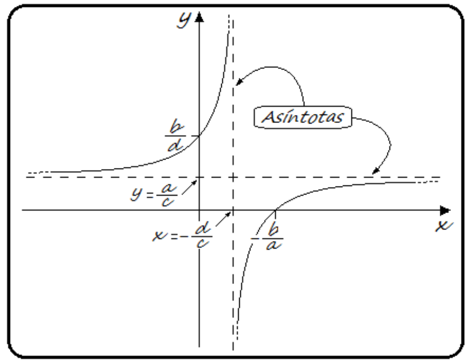
DESARROLLO:

Para este caso, queremos considerar la siguiente inecuación:

$$\boxed{\frac{3x+1}{2x-1} \leq x+3}$$

La función del lado izquierdo, es una hipérbola (cociente entre dos rectas) y la del lado derecho es una recta. Recordando un poco a estas funciones, en general podemos observar que:
Una hipérbola de la forma:

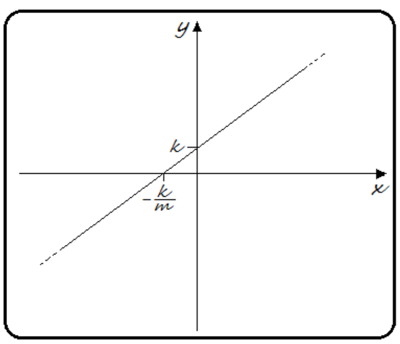
$$\boxed{y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}}$$



Tiene una asíntota horizontal de ecuación: $y = \frac{a}{c}$ (cociente de los coeficientes de los términos de mayor grado en el numerador y en el denominador) y una asíntota vertical de ecuación: $x = -\frac{d}{c}$ (valor en el que se anula el denominador), que es un valor que no pertenece al dominio de la función. Ahora bien, es importante reconocer otros dos puntos por donde pasa la hipérbola, estos son: los puntos de corte con los ejes. Para el eje y, debemos hacer la sustitución de $x = 0$ y para el eje x, es cuando la altura de la curva es cero. Entonces, nos queda:

$$\boxed{\text{Eje } x\text{: } P\left(-\frac{b}{a}, 0\right) \quad \text{y} \quad \text{Eje } y\text{: } Q\left(0, \frac{b}{d}\right)}$$

Para el caso de la recta, tenemos que: una recta es una función de la forma:

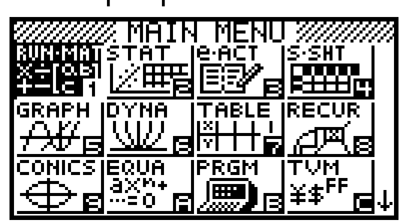


$$\boxed{y = mx + k}$$

Donde m representa la pendiente de la recta (tangente del ángulo de inclinación) y k representa el valor donde corta al eje y, es decir, los puntos de corte con los ejes están dados por:

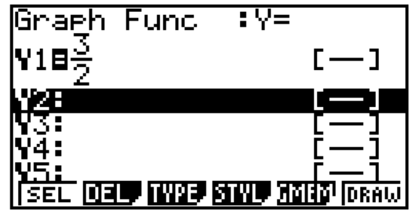
$$\boxed{R\left(-\frac{k}{m}, 0\right) \quad \text{y} \quad S(0, k)}$$

En base a estas definiciones y observaciones básicas en la construcción de las gráficas de estas funciones, podemos entonces tratar de resolver nuestra inecuación usando los recursos de la calculadora CASIO *fx-9860GII*, de diversas maneras. Para ello, comencemos por presionar la tecla MENU y se desplegará la pantalla del menú principal.

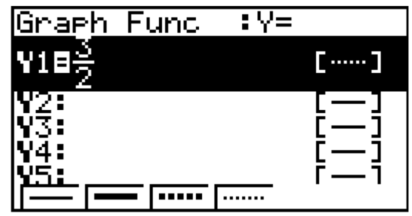


SOLUCIÓN USANDO SÓLO EL MODO GRÁFICO

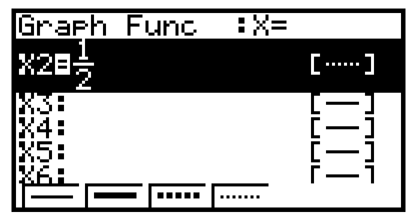
1. Dentro la galería de menús disponibles, debemos presionar el número $\boxed{5}$, para acceder al menú gráfico GRAPH, que desplegará una serie de funciones posibles a graficar (20 funciones en total).



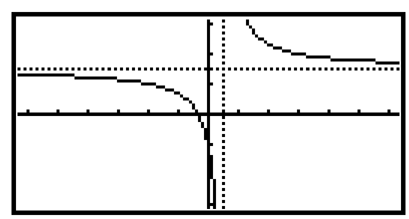
2. En primer lugar graficaremos las asíntotas. Para ello en la primera entrada colocaremos la función: $y = \frac{3}{2}$ que corresponde con la asíntota horizontal. Allí usamos la tecla $\boxed{a\frac{b}{c}}$ y en cada espacio con ayuda de la tecla elíptica, colocamos el $\boxed{3}$ y seguidamente en el denominador el $\boxed{2}$, presionamos $\boxed{\text{EXE}}$ y nos queda la imagen de la derecha.



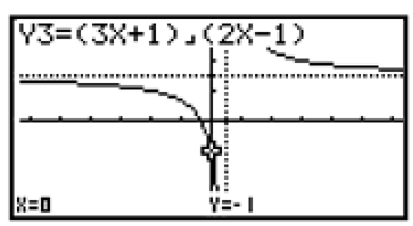
3. Vamos a realizar distinciones entre la gráfica de la función y sus asíntotas. Para ello, procedemos con la tecla elíptica hacia arriba (▲) y nos colocamos nuevamente en la función, presionamos $\boxed{\text{F4}}$ dos veces, lo que nos permite cambiar el estilo de la curva. Luego con la tecla elíptica, nos ubicamos en la siguiente gráfica (**Y2**), para graficar la siguiente asíntota.



4. Como la siguiente asíntota es vertical, su ecuación es distinta, es decir, debemos presionar primero $\boxed{\text{EXIT}}$ para regresar al menú gráfico y allí, $\boxed{\text{F3}}$ para cambiar el tipo de variable. En este menú, presionamos $\boxed{\text{F4}}$ para cambiar a variable x y realizamos una operación similar al paso 2, para escribir: $x = \frac{1}{2}$. Seguidamente, repetimos el paso 3 para cambiar el estilo de manera similar a la otra asíntota.

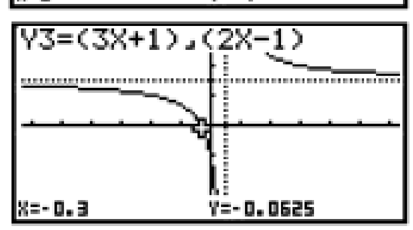


5. Para regresar a funciones de variable y, presionamos $\boxed{\text{EXIT}}$ y luego $\boxed{\text{F3}}$ (TYPE) y seguidamente $\boxed{\text{F1}}$ (variable y). Con la tecla elíptica, nos colocamos en la tercera función y allí graficamos la hipérbola presionando $\boxed{a\frac{b}{c}}$, donde para escribir la variable x, usamos la tecla de variables ($\boxed{X,\theta,T}$) sobre la de fracción y al terminar, presionamos $\boxed{\text{EXE}}$ dos veces para obtener la gráfica de la hipérbola.



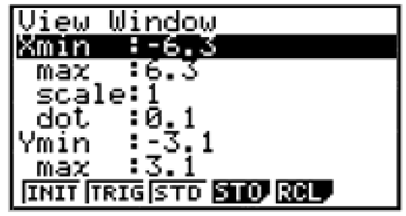
6. Usando $\boxed{\text{F1}}$ podemos identificar mediante la traza, los puntos de corte de la hipérbola con los ejes coordenados. Para ello, nos ayudamos con la tecla elíptica para ubicarnos sobre la curva que nos interesa identificar. Los puntos en este caso son:

$$P\left(-\frac{1}{3}, 0\right) \text{ y } Q(0, -1)$$



7. Para el segundo caso, con los valores estándar de nuestra calculadora no podemos identificar directamente el punto de corte, obteniendo estos valores como los más aproximados.

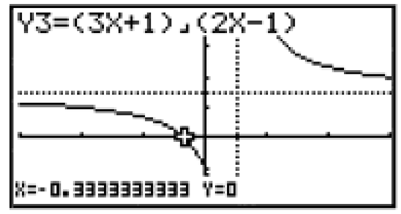
Para resolver esto, podemos ingresar a la opción **`V-Window`** presionando SHIFT y luego **F3.** Allí, cambiaremos los valores dados por defecto. Coloquemos por ejemplo: `-3` EXE `3` EXE y podremos observar que el valor del **`dot`** cambió a `0.04761904`, lo que nos proporciona más definición. Luego, con la tecla elíptica bajamos (▼) al mínimo de la otra variable y colocaremos -2 EXE 4. Al presionar EXE dos veces, volvemos al menú gráfico y presionamos nuevamente EXE para graficar. Allí realizamos de nuevo la operación con F1 para verificar los puntos de corte.

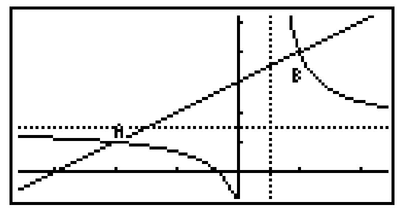


8. Con EXIT volvemos al menú grafico para proceder a graficar la recta en la posición **Y4**, lo que nos permite constatar que la hipérbola y la recta se cruzan en dos puntos. Si llamamos A al de la izquierda y B al de la derecha, entonces podremos decir que la hipérbola es menor o igual que la recta en la siguiente zona:

$$\left[A,\frac{1}{2}\right) \cup [B,\infty)$$

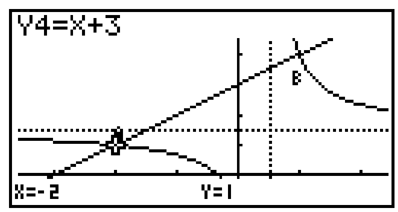
Ya que esta es justamente la zona en el eje x, donde la hipérbola está por debajo de la recta.



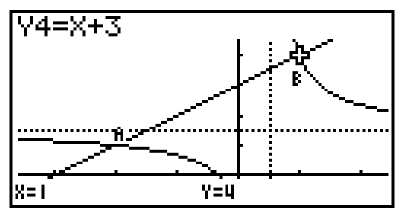


9. Ahora bien, si usamos nuevamente F1, nos queda que los puntos A y B están dados por: $A = -2$ y $B = 1$. Por tanto, nuestra solución es de la forma:

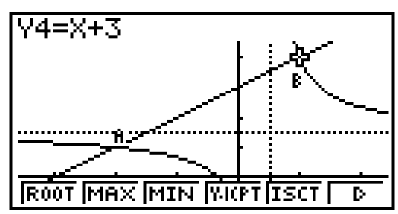
$$\left[-2,\frac{1}{2}\right) \cup [1,\infty)$$

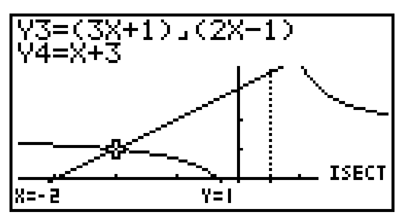


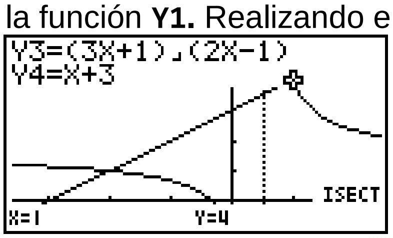
Observación: Puede ocurrir el caso en que no sea posible obtener la solución por esta vía, o en su defecto y en función de la posible imprecisión de la escala, que la información no resulte fidedigna.



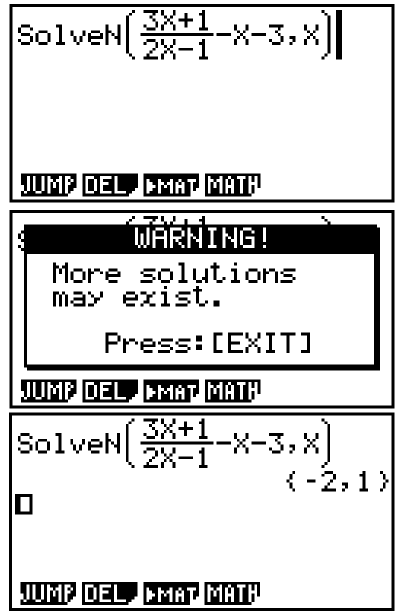
10. Para resolver este detalle de posible imprecisión podemos usar desde la gráfica la opción de la intersección de curvas. Veamos, presionamos SHIFT y seguidamente F5 (**`G-Solv`**). Al aparecer esta pantalla y pulsar nuevamente F5 no observaremos ningún cambio en función de que la asíntota horizontal y la hipérbola no se intersectan, entonces, debemos eliminar esta función, volviendo al menú gráfico y borramos la función **`Y1.`** Realizando el proceso, nos queda:







Observación: Estos puntos también los podemos obtener, haciendo el despeje usual para realizar la solución analítica usando el comando **`SolveN`**. Veamos, pulsamos MENU y luego la tecla 1**,** allí pulsamos SHIFT y luego 4 (**`CATALOG`**), con la tecla elíptica bajamos hasta encontrar **`SolveN`** (está en orden alfabético) y pulsamos EXE**.** Dentro del paréntesis escribimos la hipérbola menos la recta, seguido de y de la variable x. Aparecerá una pantalla de advertencia indicadora de que hay más de una solución, presione EXIT y seguidamente aparecerán las dos soluciones buscadas. En realidad, lo que realizó la calculadora es el cálculo de las raíces de dicha función. Debemos tener en cuenta que con esta forma de hallar estos valores, no obtenemos la solución final, en función de que $x = \frac{1}{2}$, no queda representado en dicha solución y por tanto, se debe tener en cuenta en el análisis



SOLUCIÓN DE UNA INECUACIÓN USANDO EL MÉTODO GRÁFICO Y EL ANALÍTICO

En este caso, resolveremos la inecuación usando artificios del álgebra, pero tratando de en algún momento adecuado, usar el método gráfico para poder obtener la solución de una manera más eficiente. Veamos:

Resolver: $\frac{3x+1}{2x-1} \leq x+3$, es equivalente a resolver: $\frac{3x+1}{2x-1} - (x+3) \leq 0$

Y en este caso terminamos estudiando un signo y no una comparación de alturas que es más complicado. Entonces,

$$\frac{3x+1}{2x-1} - (x+3) \leq 0 \quad \underset{\text{m.c.m}}{\Longrightarrow} \quad \frac{3x+1-(x+3)(2x-1)}{2x-1} \leq 0$$

Aplicando propiedad distributiva y sumando elementos comunes, nos queda:

$$\frac{3x+1-(x+3)(2x-1)}{2x-1} \leq 0 \xRightarrow[\text{P. Distributiva}]{} \frac{-2x^2-2x+4}{2x-1} \leq 0 \xRightarrow[\text{diviendo por} -2]{} \frac{x^2+x-2}{2x-1} \geq 0$$

La desigualdad "gira" por dividir por un número negativo. Ahora el polinomio del numerador tiene dos raíces reales y distintas, en función de que el signo del término cuadrático es positivo y el del término independiente es negativo (recordar el discriminante en la ecuación de segundo grado) sabemos que existen dos raíces reales y distintas, que además son muy sencillas de conseguir por múltiples vías. Entonces nos queda:

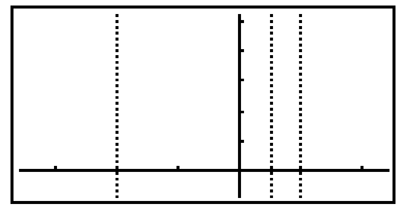
$$x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$$

Donde finalmente, resolver la inecuación original, es equivalente a resolver:

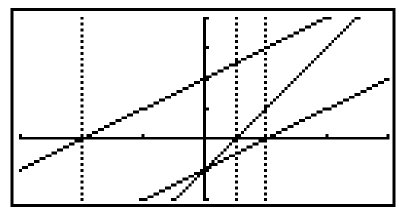
$$\boxed{\frac{(x+2)(x-1)}{2x-1} \geq 0}$$

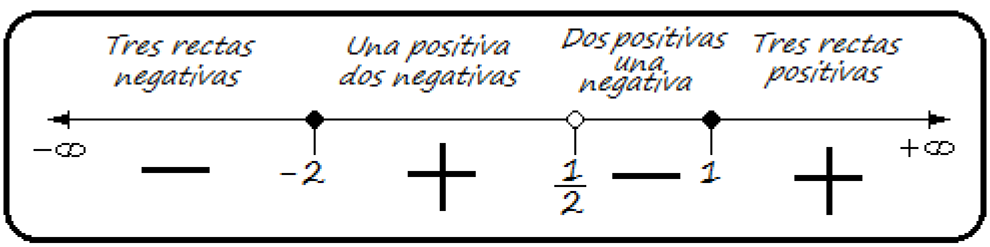
Basta entonces con estudiar los signos de estas rectas en los distintos intervalos determinados por sus raíces. A saber, como hay tres raíces, la recta real queda dividida en cuatro intervalos, donde los valores -2 y 1 pertenecen a la solución por ser los que anulan al numerador. La raíz del denominador nunca pertenece a la solución por no estar definida la función en ese valor. Entonces:

1. Nuevamente presionamos la tecla MENU y seguidamente 5 y volvemos al módulo gráfico. Una vez borradas las gráficas anteriores con la ayuda de las teclas F2 y F1, procedemos a graficar cada una de las rectas verticales que delimitan las raíces de cada una de las rectas en la última inecuación. Recordemos pulsar F3 y luego F4 para cambiar el tipo de variable y luego en cada caso con F4 en el menú principal, cambiar el estilo pulsando nuevamente F4.



   Ahora cambiemos nuevamente el tipo de variable, para graficar cada una de las rectas. Para ello, pulsamos EXIT y vamos a la cuarta función, con F3 y luego F1 volvemos a la variable y. Colocamos las rectas y al final pulsamos EXE dos veces para graficar. Podemos verificar que antes del primer corte, las tres rectas son negativas (están debajo del eje x), en el segundo una es positiva y dos negativas, en el tercero dos positivas y una negativa y por último, todas positivas. Usando la ley de los signos obtenemos que:



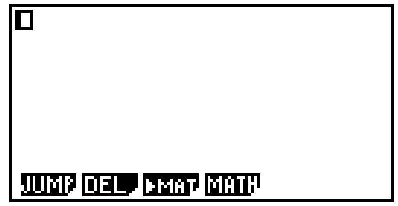


Y así obtenemos la solución deseada, desechando los dos casos donde el signo resultante es negativo y considerando que los valores $x = -2$ y $x = 1$, pertenecen a la solución por ser una desigualdad no estricta y el valor $x = \frac{1}{2}$, no pertenece ya que no es un elemento del dominio, lo cual representamos por puntos negros y punto blanco en el gráfico anterior.

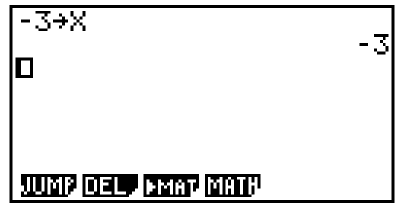
Observación: El cálculo de estos signos, también se puede realizar usando valores representativos de las zonas delimitadas anteriormente, pero para evitar posibles equivocaciones, podemos realizar el siguiente proceso.

UNA FORMA DE CALCULAR LOS SIGNOS USANDO EL MODO RUN

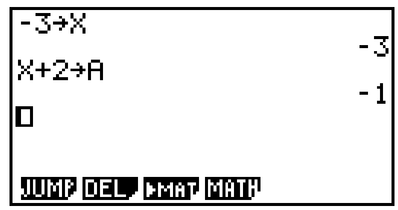
Calcular los signos anteriores puede resultar en una equivocación; cuando el estudiante debe hacer cálculos repetidos con diversos valores introducidos en una misma expresión, esto ocurre básicamente, porque en la premura de dar una respuesta rápida y concisa, se introducen las expresiones en forma repetida o bien, con el cursor nos regresamos a la pantalla que creemos debe ser e introducimos valores distintos, o bien por evitar la devolución e introducción repetida, dejamos de usar el dispositivo. Vale destacar que la calculadora CASIO *fx-9860GII*, no dispone de una aplicación donde podamos introducir una función y generar una escala de valores, pero en el modo RUN·MAT es posible proporcionar una rutina que genere estos valores de forma directa sin repetir la fórmula. Veamos:



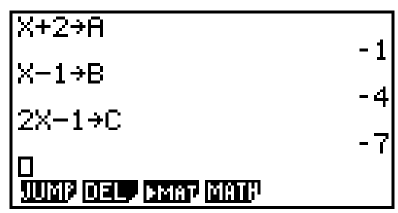
1. Presionamos MENU y 1, esto nos coloca en el modo RUN·MAT.



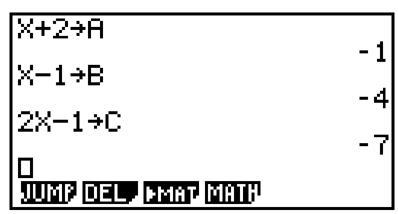
2. Ahora procederemos a declarar variables. En primer lugar, escogemos un valor que pertenezca al primer intervalo para una asignación inicial, por ejemplo $x = -3$.
   Entonces, colocamos -3 presionamos la ➡ (tecla de asignación, debajo de la tecla de la función tan) y seguidamente, la tecla de la variable x, pulsamos EXE y acabamos de asignar un valor.



3. Ahora bien, colocaremos una variable por cada componente de la inecuación. Así, para $x + 2$ la variable será A. Esto se realiza así: escribimos la expresión $x + 2$, luego la ➡ y luego la tecla SHIFT, ALPHA**,** para activar (A-LOCK) y luego la letra **A** en ese orden y presionamos EXE para obtener el valor -1, que es el resultado de sumarle 2 a – 3 (la asignación inicial).

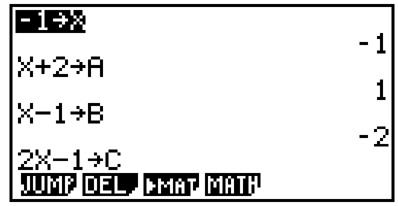


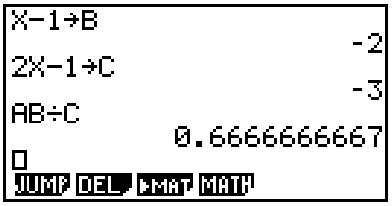
4. Hacemos un proceso similar para $x - 1$ y $2x - 1$ asignando las variables B y C. Respectivamente, obtendremos los valores, –4 y –7. Rápidamente, podemos notar el signo que tiene cada recta en un valor que pertenece al primer intervalo obtenido y por tanto el resultado es negativo en esa zona, lo propio pasará cuando cambiemos dicho valor. Aun así, podemos mejorar el proceso observando un solo signo. Veamos:

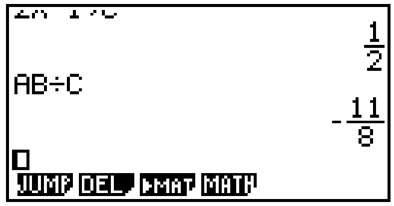


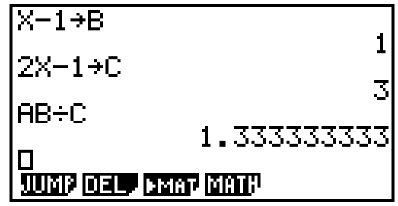
5. Calculemos el signo de la expresión del lado izquierdo de la inecuación, colocando ALPHA luego presionamos **A**, luego ALPHA y seguido **B,** esto nos dará el producto del numerador, luego presionamos la tecla a b/c y seguidamente, ALPHA y luego **C,** al pulsar EXE, obtenemos en efecto un resultado negativo.

6. Con el cursor nos regresamos a la primera línea y cambiamos el valor de x por un valor en el segundo intervalo, por ejemplo -1. Al final, al pulsar EXE obtenemos el valor `0.6666666667` que es positivo, como se esperaba. Haciendo esto con $0.75 = \frac{3}{4}$ y con 2, que son valores de los próximos dos intervalos, nos queda:









Obteniendo nuevamente la solución esperada. A esta forma de trabajar, usualmente los profesores y estudiantes se refieren a ella como la regla del cementerio, pero su uso resulta en algunos casos, desordenado y sin seguridad real de que los cálculos son correctos para este estudio, todo esto en función de que los cálculos se realizan en casi todos los casos sin seguir una rutina prestablecida. Así, el recurso que nos proporciona la calculadora CASIO *fx-9860GII*, nos permite garantizar que la respuesta es correcta desde múltiples vías

EJERCICIOS ADICIONALES:

Como una forma de observar que los recursos son versátiles, dejamos al lector los siguientes ejercicios para usar las técnicas expuestas y así poder mejorar la experiencia en el uso de la calculadora, basándonos en la práctica y la continuidad de procesos.

- $\left|\frac{3x+1}{2x-1}\right| \leq x+3$ Sol: $\left[-2, \sqrt{5}-2\right] \cup [1, \infty)$

Para los siguientes, hallar la solución:

- $\left|\frac{3x+1}{2x-1}\right| \leq |x+3|$
- $\left|\frac{3x+1}{2x-1}\right| \leq \left|\frac{x+3}{2-x}\right|$
- $x^2 - 3x + 6 > 2 - 5x$